

Traffico.

In una rete stradale si vuole studiare come il traffico si potrebbe distribuire tra i vari itinerari possibili e con quale effetto. In particolare si considera una rete semplificata, descritta da un piccolo grafo orientato. Si considera inoltre un insieme di coppie origine/destinazione che generano il traffico. Su ogni tratto stradale (arco del grafo) si suppone che il tempo di percorrenza sia una funzione crescente del flusso di veicoli che lo percorrono (numero di veicoli per unità di tempo). In prima approssimazione si suppone che tale funzione sia una parabola, data da una costante (tempo base) più un termine proporzionale al quadrato del numero di veicoli che entrano nell'arco per unità di tempo.

E' nota la domanda di traffico (numero di veicoli per unità di tempo) per ogni coppia O/D. Si vuole studiare quale potrebbe essere il minimo tempo complessivo speso da tutti veicoli per viaggiare dalla loro origine alla loro destinazione se un decisore unico potesse pianificare centralmente il percorso di ciascuno.

Formulare il modello matematico del problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto nel seguito e discutere ottimalità e unicità della soluzione trovata.

Esempio.

Il grafo ha cinque nodi numerati da 1 a 5 e gli archi seguenti:

Arco	Tempo-base	Coeff.
(1,2)	20	0.1
(1,4)	14	0.1
(1,5)	7	0.2
(2,1)	20	0.1
(2,3)	22	0.1
(2,5)	15	0.2
(3,2)	22	0.1
(3,4)	15	0.1
(3,5)	10	0.2
(4,1)	14	0.1
(4,3)	15	0.1
(4,5)	10	0.2
(5,1)	7	0.2
(5,2)	15	0.2
(5,3)	10	0.2
(5,4)	10	0.2

Table 1: Tempo-base e coefficiente di proporzionalità per ogni arco. Per tempo-base si intende il tempo di percorrenza quando non ci sono altri veicoli. Per coefficiente si intende il coefficiente moltiplicativo del termine quadratico.

Le coppie origine-destinazione sono indicate nella tabella 2.

Origine	Destinazione	Traffico
1	3	60
2	4	80
3	1	120
4	2	50

Table 2: Tempo-base e coefficiente di proporzionalità per ogni arco. Per tempo-base si intende il tempo di percorrenza quando non ci sono altri veicoli. Per coefficiente si intende il coefficiente moltiplicativo del termine quadratico.

Soluzione.

Il grafo orientato descritto nei dati ha 5 nodi e 16 archi. Sono indicati un insieme O di origini e un insieme D di destinazioni, che sono sottinsiemi dell'insieme dei nodi N (e che nell'esempio coincidono). Poiché il grafo orientato non è completo, si può completarlo artificialmente aggiungendo archi con tempi di percorrenza altissimi, oppure con tempi qualsiasi ma con flussi esplicitamente fissati a zero.

Si vuole attribuire ad ogni arco (i, j) del grafo un flusso, che va quindi rappresentato con una variabile continua e non-negativa, che ha come unità di misura il numero di veicoli per unità di tempo. Tale grandezza è a sua volta la somma di diversi contributi, dovuti alle diverse coppie O/D. E' quindi necessario specificare tante variabili x_{ijod} quanti sono i contributi al traffico di ogni coppia (o, d) per ogni arco (i, j) del grafo.

Il tempo di attraversamento del generico arco (i, j) si calcola in base al flusso totale presente sull'arco (somma dei diversi contributi di cui sopra), secondo la formula quadratica descritta nel testo:

$$t_{ij} = \tau_{ij} + k_{ij} \left(\sum_{(o,d)} x_{ijod} \right)^2,$$

dove τ_{ij} e k_{ij} sono dati (tempo base e coefficiente di proporzionalità).

Il modello deve comprendere i vincoli che impongono che il traffico r_{od} per ogni coppia origine-destinazione (o, d) percorra un cammino orientato da o a d .

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} (x_{ojod} - x_{jood}) &= r_{od} \quad \forall (o, d) \\ \sum_{j \in N} (x_{djod} - x_{jodj}) &= -r_{od} \quad \forall (o, d) \\ \sum_{j \in N} (x_{ijod} - x_{jiod}) &= 0 \quad \forall (o, d) \forall i \neq o, d. \end{aligned}$$

L'obiettivo è la minimizzazione del tempo di viaggio complessivo, che si può calcolare sommando tutti i tempi consumati da tutti i veicoli su tutti gli archi:

$$\text{minimize } z = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{(o,d)} t_{ij} x_{ijod}.$$

Il modello è non-lineare e la soluzione calcolata dal solutore potrebbe essere un minimo locale (a seconda delle garanzie fornite dal solutore).

Il valore calcolato da Snopt è 159492.3809.