Scheduling

Una macchina utensile deve svolgere una serie di operazioni (jobs). Di ogni job è nota la durata. I jobs non si possono sovrapporre: per poterne iniziare uno dev'essere completato quello precedente. Per ogni job sono noti gli istanti iniziale e finale di una finestra temporale all'interno della quale deve iniziare e terminare la lavorazione. Sull'obiettivo i responsabili della pianificazione della produzione discutono; si vorrebbero considerare diverse possibilità. Un primo obiettivo è quello di minimizzare il tempo complessivo necessario ad eseguire tutti i jobs. Un secondo obiettivo consiste nel minimizzare il tempo medio di completamento dei jobs. Un terzo obiettivo consiste nel massimizzare l'anticipo con cui mediamente i jobs vengono completati rispetto alla loro scadenza, cioè all'istante finale della loro finestra temporale.

Formulare il problema, classificarlo e risolvere l'esempio con i dati riportati nel seguito.

Discutere unicità e ottimalità della soluzione ottenuta.

Esempio

Job	Tempo	Inizio	Fine
1	10	15	50
2	14	0	80
3	21	0	95
4	18	10	75
5	4	5	30
6	23	13	130
7	35	18	120

Tabella 1: Tempo di lavorazione, inizio e fine della finestra temporale per ogni job.

Soluzione

Sia J l'insieme dei job. Indichiamo con p_j, r_j e D_j rispettivamente il tempo di lavorazione (*processing time*) e gli estremi della finestra temporale (*release date* e *deadline*) di ogni job $j \in J$.

Il modello del problema si può formulare in diversi modi.

Una possibilità consiste nell'associare ad ogni job un istante iniziale, rappresentato da una variabile continua non-negativa $t_j \ \forall j \in J$. Di consegfuenza il tempo di completamento di ogni job è dato da $t_j + p_j$.

Limiti inferiori e superiori alle variabili impongono il rispetto delle finestre temporali.

$$t_j \geq r_j \quad t_j \leq D_j - p_j \quad \forall j \in J.$$

Per imporre la non-sovrapposizione tra i jobs è necessario formulare vincoli disgiuntivi, introducendo una variabile binaria per ogni coppia di jobs: $x_{ij} = 1$ se e solo se $i \in J$ precede $j \in J$ nello schedule. Tali variabili devono soddisfare la condizione

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \ \ \forall i \neq j \in J.$$

I vincoli disgiuntivi hanno la forma

$$t_j \geq t_i + p_i - M x_{ji} \quad \forall i \neq j \in J.$$

Il primo obiettivo è di tipo min-max e richiede l'introduzione di una variabile ausiliaria, che rappresenta il tempo di complemtaneto dell'ultimo job (*makespan*).

Gli altri due obiettivi sono semplici combinazioni lineari dei tempi di completamento.

Il modello risultante è di programmazione lineare intera con variabili binarie.

Quindi, la soluzione fornita dai solutori è garantita essere ottima, non necessariamente unica.

La soluzione ottima nel primo caso è data da diverse sequenze equivalenti, con $z_1 = 125$. La soluzione ottima nel secondo caso è data dalla sequenza $(2, 5, 1, 4, 3, 7, 6)$, con $z_2 = 57, 14$. La soluzione ottima nel terzo caso è data dalla stessa sequenza, con $z_3 = 180$.