Esercizio PNL 85: Rettangolo

Dato un insieme di N punti nel piano cartesiano, si vuole trovare il rettangolo di minima area che li copre tutti. N.B. Non è obbligatorio che il rettangolo abbia i lati paralleli agli assi cartesiani.
Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati seguennti. Discutere l'unicità e l'ottimalità della soluzione ottenuta.

Dati. I punti dati sono 10.

Punto	x	y
1	-7	-2
2	-3	5
3	-4	-5
4	10	5
5	11	2
6	6	9
7	0	-6
8	-6	2
9	9	0
10	-7	0

Table 1: Posizione dei punti dati nel piano.

Soluzione Esistono molti modi di rappresentare un rettangolo nel piano (quattro rette, quattro vertici, un vertice, due lati e l'angolo rispetto ad una direzione di riferimento,...). Qui di seguito viene illustrato il modello che si ottiene specificando la quattro equazioni delle rette dei lati.

I dati sono due vettori di coordinate dei punti dati.

Le variabili sono i coefficienti a, b e c delle equazioni (in forma generale, $ax + by + c = 0$) delle rette da determinare. E' opportuno usare la forma generale per rappresentare le rette, e non la forma esplicita $y = mx + q$, perché non si ha alcuna garanzia che le rette non siano verticali.

Usando un indice $j = 0, \ldots, 3$, indichiamo i coefficienti con a_j, b_j e c_j per ogni retta. Usare un indice da 0 a 3 anziché da 1 a 4 rende più semplice gestire le operazioni sugli indici quando è necessario farle ciclicamente, cioè - nel nostro caso - modulo 4.

I vincoli devono imporre che le quattro rette formino un rettangolo e che il rettangolo copra tutti i punti dati.

Una prima condizione indispensabile è quella che garantisce che ogni terna di coefficienti corrisponda effettivamente ad una retta, impedendo il caso degenere $a_j = b_j = c_j = 0$:

$$a_j^2 + b_j^2 = 1 \quad \forall j = 0, \ldots, 3.$$

Inoltre tale condizione ha l'effetto positivo di eliminare le rappresentazioni multiple di ogni retta, mantenendone solo due possibili, una ottenuta dall'altra cambiando i segni dei tre coefficienti. Tale duplice rappresentazione del resto è molto utile poiché ci permette di lavorare con le distanze col segno, misurando quando lontano dal vincolo ogni punto si trova, dalla parte consentita o dalla parte proibita. I vincoli infatti nel nostro caso sono disequazioni, non equazioni. Perciò è necessario distinguere i due orientamenti possibili di ogni retta.

Le condizioni di normalizzazione nella forma $a^2+b^2 = 1$, inoltre, non richiedono di introdurre variabili aggiuntive e hanno l'ulteriore effetto di poter trascurare il denominatore nella formula della distanza tra punto e retta nel piano:

$$d(r, P) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

In particolare, eliminando anche il valore assoluto al numeratore si ottiene che la quantità $ax_P + by_P + c$ indica la distanza del punto (x_P, y_P) dal vincolo $ax + by + c \geq 0$. Se il vincolo è in forma di $\geq$, la distanza è positiva o nulla per i punti che soddisfano il vincolo e negativa per i punti che lo violano.

Osserviamo anche che il valore di c risulta uguale alla distanza con segno dell'origine dal vincolo; perciò, la distanza tra due rette parallele e orientate nello stesso modo è data dalla differenza tra i loro coefficienti c, mentre la distanza tra due rette antiparallele, cioè parallele ma orientate in modo opposto, è data dalla somma dei loro coefficienti c. In questo esercizio ciò è molto utile per poter esprimere la lunghezza dei lati del rettangolo.

Una volta imposto che le terne (a, b, c) descrivano effettivamente delle rette (orientate), bisogna imporre che esse formino un rettangolo con i lati opposti su rette antiparallele e i lati adiacenti su rette perpendicolari.

Le condizioni di parallelismo sono

$$a_j = -a_k \quad b_j = -b_k$$

e vanno imposte sulle coppie di rette per cui $k = (j + 2) \pmod 4$.

Le condizioni di perpendicolarità sono

$$a_j a_k + b_j b_k = 0$$

e vanno imposte sulle coppie di rette per cui $k = (j + 1) \pmod 4$.

Naturalmente, non tutte queste condizioni sono necessarie: ne bastano due del primo tipo e una del secondo.

Infine, occorre richiedere che tutti i punti dati soddisfino tutti e quattro i vincoli di diseguaglianza:

$$a_j x_i + b_j y_i + c_j \geq 0 \ \ \forall j = 0, \ldots, 3 \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

La funzione obiettivo si esprime facilmente come prodotto delle lunghezze dei due lati del rettangolo:

$$z = (c_0 + c_2)(c_1 + c_3).$$

Il modello risultante è di programmazione non lineare e non è convesso (i vincoli di normalizzazione non lo sono, poiché sono vincoli di uguaglianza e sono non-lineari).