Nutrie. Per contrastare la diffusione delle nutrie che rovinano i raccolti e devastano le rive dei fossi, gli amministratori di alcuni paesi hanno deciso di assoldare squadre di cacciatori che tentino di abbattere o catturare gli animali. Sono state fatte eseguite alcune stime sulla popolazione di nutrie in ciascuno dei paesi e si vuole ora ripartire il compito tra i cacciatori in modo che ciascuno di essi possa cacciare un numero di nutrie pressappoco uguale. Ogni cacciatore potrà operare nel territorio di non più di 3 paesi, senza sconfinare negli altri. In ogni paese si assume che la popolazione stimata di nutrie sia equamente suddivisa tra tutti i cacciatori assegnati a quel paese. In base agli assegnamenti dei cacciatori ai paesi si può calcolare così il numero di nutrie che ci si aspetta da ogni cacciatore (il "target" del cacciatore). Si vuole minimizzare il massimo di tali valori target.

Formulare e classificare il problema e risolverlo con i dati del file NUTRIE.TXT, riportati qui sotto.

Discutere unicità e ottimalità della soluzione ottenuta.

Dati. I cacciatori sono 5. I paesi sono 10.

Paesi	Popolazione di nutrie stimata
A	20
B	30
C	24
D	36
E	80
F	72
G	54
H	37
I	25
L	47

Soluzione. Detto P l'insieme dei paesi e C l'insieme dei cacciatori, il problema richiede di definire un assegnamento tra l'insieme dei paesi e l'insieme dei cacciatori: ogni variabile binaria x_{ij} vale 1 se e solo se il cacciatore $j \in C$ è assegnato al paese $i \in P$. I vincoli impongono che il numero di paesi per ogni cacciatore sia non superiore al limite massimo M (pari a 3).

$$\sum_{i \in P} x_{ij} \leq M \quad \forall j \in C.$$

Ad ogni paese è necessario assegnare almeno un cacciatore:

$$\sum_{j \in C} x_{ij} \geq 1 \quad \forall i \in P.$$

In ogni paese $i \in P$ il numero stimato di nutrie n_i viene ripartito in modo equo tra tutti i cacciatori assegnati a quel paese. Pertanto occorre dividere la popolazione data per il numero di cacciatori assegnati. Introduciamo quindi per comodità le variabili ausiliarie k_i, che indicano per ogni paese $i \in P$ il numero di cacciatori assegnati a quel paese.

$$k_i = \sum_{j \in C} x_{ij} \quad \forall i \in P.$$

Ogni cacciatore assegnato al paese $i \in P$ avrà quindi in quel paese un target pari a n_i/k_i. Il target totale di ogni cacciatore $j \in C$, indicato da una variabile ausiliaria y_j, si ottiene sommando tale rapporto su tutti i paesi a cui il cacciatore è assegnato.

$$y_j = \sum_{i \in P} \frac{n_i}{k_i} x_{ij} \quad \forall j \in C.$$

Per evitare che il solutore cconsideri soluzioni con zero assegnamenti ad un paese, provocando un denominatore uguale a zero nel vincolo, con conseguente messaggio di errore, è opportuno imporre esplicitamente che almeno un cacciatore si assegnato ad ogni paese:

$$k_i \geq 1 \quad \forall i \in P.$$

L'obiettivo è di minimizzare il massimo tra i valori di y:

$$\text{minimize } z \quad \text{s.t. } z \geq y_j \quad \forall j \in C.$$

Il modello è programmazione non-lineare, con variabili intere.

La soluzione è indicata nel foglio elettronico Nutrie.xlsx. Essa è ottima, poiché una volta fissato per enumerazione implicita il valore delle variabili discrete, la soluzione è univocamente determinata (non ci possono essere ottimi locali). Essa non è unica perché i cacciatori sono intercambiabili; quindi possono esistere tante soluzioni ottime equivalenti quante le permutazioni dei cacciatori.