

## Magazzino

L'ufficio approvvigionamenti di un'azienda deve stabilire la frequenza con cui richiedere le forniture di un certo materiale. Si vuole trovare il piano di approvvigionamento periodico (ripetibile senza variazioni ogni quattro settimane) ottimale. La settimana lavorativa dura dal lunedì al sabato compresi. Ogni unità di materiale ordinato costa 80 euro. Il reparto produttivo richiede all'inizio di ogni mattina lavorativa esattamente un'unità del materiale. Ogni volta che un camion del fornitore giunge in azienda (sempre nel tardo pomeriggio, alla fine di una giornata lavorativa) avviene un'operazione di scaricamento, che impiega il personale per un certo periodo di tempo straordinario, indipendente dalla quantità di materiale scaricato. Tale costo di scaricamento viene valutato in 400 euro. La capacità massima del camion del fornitore è di 10 unità del materiale e il fornitore non accetta ordinazioni di quantità inferiori a 5 unità. Anche mantenere il materiale immagazzinato costa. Il costo giornaliero di giacenza è proporzionale alla quantità di materiale che resta immagazzinato durante il giorno e il coefficiente di proporzionalità è pari a 20 euro per ogni unità di materiale. Anche la giacenza durante le domeniche contribuisce al costo.

## Soluzione commentata

Sia  $G$  l'insieme dei giorni del mese.

Il costo totale da minimizzare è dato da tre voci: il costo di acquisto, il costo delle operazioni di scaricamento e il costo di giacenza.

Il primo dei tre non entra in gioco nell'ottimizzazione poiché è un costo fisso, indipendente dagli approvvigionamenti. Ogni mese il costo fisso è pari a 80 euro/unità  $\times$  1 unità/giorno lavorativo  $\times$  6 giorni lavorativi/settimana  $\times$  4 settimane/mese = 1920 euro/mese.

Gli altri due costi invece hanno andamento crescente l'uno e decrescente l'altro rispetto alla frequenza degli approvvigionamenti: rifornirsi spesso in quantità ridotte aumenta i costi di scaricamento e riduce quelli di giacenza, mentre rifornirsi raramente di grandi quantità ha l'effetto opposto.

Le variabili decisionali  $x_g$  del problema sono tante quante i giorni dell'insieme  $G$ . Se  $x_g = 1$ , allora è previsto un rifornimento nel giorno  $g \in G$ , altrimenti no.

Perciò i costi di scaricamento sono dati da

$$\sum_{g \in G} kx_g,$$

dove  $k = 400$  euro è il coefficiente dato.

I costi di giacenza invece sono dati dalla somma su tutti i giorni delle giacenze giornaliere in magazzino, con un peso di  $h = 20$  euro/unità ciascuna. Si possono rappresentare le giacenze durante ogni giorno  $g \in G$  con variabili intere  $y_g \geq 0$ .

La funzione obiettivo è quindi

$$\text{minimize } z = \sum_{g \in G} (kx_g + hy_g).$$

Indicando con  $q_g$  la quantità di merce scaricata al termine del giorno  $g \in G$ , le variabili  $y$  sono legate tra loro dai seguenti vincoli di flusso:

$$y_{g+1} = y_g + q_g - 1 \quad \forall g \in G : g + 1 \bmod 7 \neq 0$$

$$y_{g+1} = y_g + q_g \quad \forall g \in G : g + 1 \bmod 7 = 0$$

I primi riguardano i giorni lavorativi, i secondi le domeniche. Gli indici vanno intesi modulo il numero dei giorni: quindi  $y_{g+1}$  va sostituita con  $y_{(g \bmod |G|)+1}$ .

Le variabili  $q$  vanno vincolate ad essere comprese tra 5 e 10, nei giorni in cui viene fatto un rifornimento, tramite i vincoli:

$$5x_g \leq q_g \leq 10x_g,$$

che nel caso  $x_g = 0$  impongono  $q_g = 0$ , e nel caso  $x_g = 1$  impongono  $5 \leq q_g \leq 10$ . Anche le variabili  $q$  devono essere dichiarate come variabili intere.

I rifornimenti non possono avvenire di domenica: perciò

$$x_g = 0 \quad \forall g \in G : g \bmod 7 = 0.$$

Tutti i vincoli sono lineari, quindi il problema è di PLI. La soluzione è garantita essere ottima, non necessariamente unica.

Con i dati dell'esempio, il piano ottimale di rifornimenti prevede un rifornimento di 6 unità di merce ogni lunedì. Il costo corrispondente (depurato della parte di costo fisso) è pari a 2880 euro ogni quattro settimane.