Chiatte

Un'idrovia collega un porto marittimo situato a valle ad un porto fluviale situato a monte ed è costituita da due canali navigabili paralleli. Le chiatte cariche di merce, tutte uguali e di capacità nota, possono navigare in entrambe le direzioni lungo entrambi i canali. Tutte le chiatte procedono alla stessa velocità nota e costante rispetto all'acqua su entrambi i canali ed in entrambe le direzioni. Tuttavia la corrente fluisce lungo i canali navigabili a velocità nota e costante da monte verso valle e quindi rispetto alla terra le chiatte che risalgono verso monte navigano a velocità inferiore a quelle che scendono verso valle. Lungo entrambi i canali c'è una strettoia nella quale le chiatte devono navigare a senso unico alternato. Sono note le lunghezze dei due tratti. Le chiatte sono disponibili in numero illimitato e lavorano a ciclo continuo viaggiando tra i due porti senza sosta. Si vuole sapere qual è la massima quantità di merce per unità di tempo che si può trasportare da valle a monte e da monte a valle in questo modo. Si vuole anche sapere quante chiatte instradare in ciascuno dei due canali per ottenere questo risultato.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto nel seguito e discutere l'ottimalità e l'unicità della soluzione.

La soluzione migliorerebbe accorciando una delle due strettoie? Quale tra le due strettoie converrebbe accorciare a parità di costi al chilometro per eseguire il lavoro?

Esempio

Canale	Lunghezza della strettoia	Velocità della corrente
1	0,5 km	2 km/h
2	0,75 km	1 km/h

Tabella 1: Canali e strettoie

La velocità delle chiatte rispetto all'acqua è di 10 km/h. La capacità delle chiatte è di 1500 tonnellate.

Soluzione

Si tratta di un problema di flusso, dove la rete è costituita dai due canali paralleli, bidirezionali, che collegano due nodi che rappresentano i due porti a monte e a valle. Esistono quindi quattro archi, corrispondenti alle due direzioni $d = 1..2$ nei due canali $c = 1..2$. I flussi su questi quattro archi, $x(c, d)$, sono le quattro variabili (continue e non-negative) del problema e sono misurati in numero di chiatte per unità di tempo. Poiché non c'è accumulo di chiatte nel tempo né a monte né a valle, i flussi complessivi in salita e in discesa devono essere bilanciati. Deve cioè valere l'uguaglianza

$$\sum_{c=1,2} x(c,1) = \sum_{c=1,2} x(c,2)$$

L'obiettivo è di massimizzare il flusso di merce (misurato in unità di peso per unità di tempo), che è dato dal flusso di chiatte moltiplicato per la loro capacità.

$$\text{maximize} \sum_{c=1,2} x(c,1)$$

Dato il vincolo precedente, non fa alcuna differenza massimizzare il flusso in salita o quello in discesa (o la loro somma), dato che devono essere uguali.

Il vincolo sulle strettoie impone che in ciascun canale il tratto a senso unico alternato venga percorso da una chiatta per volta o in un senso o nell'altro, in mutua esclusione. Dai dati sulle velocità e sulle lunghezze, è possibile ricavare il tempo di attraversamento delle strettoie, $t(c, d)$, per ogni canale $c = 1, 2$ e per ogni direzione $d = 1, 2$.

Detta $L(c)$ la lunghezza della strettoia su un canale c e $v(c, d)$ la velocità di una chiatta che la attraversa in direzione d, il tempo $t(c, d)$ impiegato da ogni chiatta per attraversare la strettoia è $L(c)/v(c, d)$ (espresso in ore). Moltiplicando tale valore per il flusso $x(c, d)$ (espresso in numero di chiatte all'ora), si ottiene un numero adimensionale, che indica la frazione di tempo complessivo in cui la strettoia del canale c viene percorsa in direzione d. La somma di tali quantità nelle due direzioni deve essere non superiore a 1.

$$t(c,1)x(c,1) + t(c,2)x(c,2) \leq 1 \quad \forall c = 1,2$$

La velocità è la somma della velocità della chiatta e della corrente se la navigazione è verso valle, mentre è la differenza se è verso monte.

Il problema risultante è di programmazione lineare.

La soluzione dell'esempio è ottima (perché il problema è di PL) e unica (non ci sono variabili fuori base con costo ridotto nullo). Poiché il problema ha 4 variabili, un vincolo di uguaglianza e due vincoli di disuguaglianza, le variabili in base sono 3. Ciò significa che se i vincoli sulla capacità delle strettorie sono attivi (come è logico che sia quando il flusso è massimo) uno dei 4 flussi è nullo. Infatti nella soluzione ottima risulta nullo il flusso in discesa lungo il canale 2.

Modificando la lunghezza delle strettoie, si modifica di conseguenza il tempo di attraversamento, attraverso un coefficiente che dipende dalle velocità. Tuttavia tale coefficiente non compare esplicitamente nell'obiettivo come sarebbe necessario per poter eseguire l'analisi post-ottimale. Risolvendo quindi il modello con valori modificati (uno per volta) è possibile valutare l'impatto dei lavori, come richiesto. Ad esempio, accorciando di 100 metri la strettoia sul canale 1, il valore ottimo sale da 25200 a 28800 senza che cambi la base, mentre accorciando di 100 metri la strettoia sul canale 2, il valore ottimo sale da 25200 a 26861 senza che cambi la base. Quindi, almeno finché non si ha un primo cambio di base, conviene intervenire sul canale 1.