Campagna elettorale

Bisogna recapitare entro 24 ore i volantini dalla sede centrale alle sedi periferiche del partito, una per ogni paese della zona, perchè ferve la campagna elettorale. Un funzionario del partito dispone della piantina del territorio su cui sono riportate le lunghezze delle strade che collegano tra loro tutti i paesi. Per poter eseguire il trasporto immediatamente e a basso costo, il capo-partito locale decide che bisogna servirsi dei mezzi pubblici, che però hanno un percorso fisso e noto.

Esistono P pulmini e ciascuno di essi segue un suo percorso, lungo il quale esegue K fermate in sequenza, scegliendo sempre il percorso di lunghezza minima da ogni fermata alla successiva. Ogni pulmino fa un viaggio solo al giorno. I pulmini si fermano solo nei paesi. Può darsi che uno stesso pulmino si fermi più volte, anche non consecutive, nello stesso paese e che uno stesso paese sia servito da più pulmini. C'è un altro funzionario del partito che conosce le tappe dei percorsi di tutti i pulmini.

Alcuni volonterosi iscritti al partito si dichiarano disponibili a compiere un viaggio ciascuno su un pulmino, per portare i volantini in tutti i paesi toccati da quel pulmino. La durata del viaggio su ogni pulmino è proporzionale alla lunghezza del percorso dalla prima all'ultima tappa.

L'obiettivo è di portare i volantini in tutti i paesi minimizzando la quantità di ore-uomo trascorse in viaggio.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file ELEZIONI.TXT.

Valutare anche l'*integrality gap*, con gli stessi dati.

Soluzione

Le variabili decisionali corrispondono ai pulmini: ciascun pulmino può essere usato oppure no. Quindi le variabili sono binarie. Si conoscono i paesi toccati da ogni pulmino e si vuole scegliere un sottoinsieme di pulmini tale da toccare tutti i paesi almeno una volta. Si tratta quindi di un problema di Set Covering.

Il costo associato ad ogni pulmino, ossia ad ogni variabile binaria, è dato dal tempo che il pulmino impiega in viaggio, cioè dalla lunghezza del suo percorso. Ogni percorso è fatto dalla concatenazione di tanti cammini minimi quanti sono i tratti da paese a paese. Quindi è necessario conoscere la matrice dei cammini minimi tra tutte le coppie di paesi. Tale matrice è contenuta nel file CAMMINI.TXT.

La formulazione contiene la funzione obiettivo che richiede di minimizzare la somma pesata delle 20 variabili binarie corrispondenti ai 20 pulmini; i coefficienti sono dati, come detto, dalla somma dei cammini minimi percorsi dal pulmino. Ad esempio, il pulmino n.1 tocca in sequenza i paesi 30, 13, 19, 22, 23 e 7 e quindi il suo tempo di viaggio è pari alla somma dei cammini minimi 30➔13, 13➔19, 19➔22, 22➔23 e 23➔7, ossia 17 + 10 + 14 + 26 + 9 = 76.

I vincoli sono tanti quanti i paesi: in ciascun vincolo la somma delle variabili corrispondenti ai pulmini che toccano il paese viene posta maggiore o uguale a 1. Ad esempio, il primo paese viene toccato dai pulmini 5, 6, 13 e 17 e dà quindi luogo al vincolo $x5 + x6 + x13 + x17 >= 1$.

Infine, tutte le 20 variabili sono dichiarate binarie.

La soluzione ottima indica i 7 pulmini che al costo di 207 ore-uomo coprono tutti i paesi.

Per valutare l'*integrality gap* basta togliere il vincolo di integralità imposto alle variabili e risolvere il rilassamento continuo del problema. Il valore ottimo del rilassamento è 202: quindi l'*integrality gap* è pari al 2.5% circa (5/207). Come si può notare nella soluzione del rilassamento continuo alcune variabili hanno valore frazionario (pari a 0.5).