Bagnino.

Sulla spiaggia un bagnino vede una persona in difficoltà in mare e deve raggiungerla nel minor tempo possibile. Si può supporre che nel tratto di spiaggia considerato la linea di separazione tra la terra ed il mare sia una retta. Il bagnino conosce la posizione propria e del bagnante rispetto alla retta ed inoltre conosce la massima velocità con cui può correre sulla spiaggia e la massima velocità con cui può nuotare.

Versione 2: sulla spiaggia c'è un recinto circolare, che delimita un'area dove le tartarughe Caretta Caretta depongono le uova, che non si può attraversare. Il bagnino valuta immediatamente da quale parte sia conveniente aggirare il recinto.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto nel file BAGNINO.TXT. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Dati.

Assumendo che la retta r abbia equazione $x = 0$ con la spiaggia sul lato $x < 0$ e il mare sul lato $x > 0$, esprimendo tutte le coordinate in metri, il bagnino si trova in posizione $(-10, 0)$, il recinto delle tartarughe ha centro in $(-6, 5)$ e raggio 3, il bagnante in difficoltà è in posizione $(20, 17)$. La velocità con cui il bagnino corre è 24 km/h; quella con cui nuota è 6 km/h. Il bagnino valuta che sia meglio tenere il recinto alla propria destra.

Soluzione commentata.

In assenza di ostacoli sulla spiaggia, il problema si può risolvere con la Legge di Snell, la stessa che governa il fenomeno della rifrazione della luce. Il rapporto tra i seni degli angoli di incidenza della traiettoria del bagnino (angolo tra la traiettoria rettilinea e la normale alla linea di separazione tra terra e mare) deve essere pari al rapporto tra le velocità nel mezzo corrispondente. Poiché in questo caso la velocità sulla terra è quadrupla della velocità in mare, il seno dell'angolo tra la traiettoria sulla terra e la normale alla costa dev'essere quadruplo del seno dell'angolo tra la traiettoria in mare e la normale alla costa.

Questa proprietà non vale più quando il problema è complicato dalla presenza di ostacoli (recinto per le tartarughe).

Dati.
Denominiamo i dati come segue:

- (x_A, y_A): punto di partenza,
- (x_B, y_B): punto di arrivo,
- (x_T, y_T): centro del recinto,
- r_T: raggio del recinto,
- v_A: velocità del bagnino che corre,
- v_B: velocità del bagnino che nuota.

Si osservi che le velocità sono date in km/h ma vanno convertite in m/sec per uniformare le unità di misura. E' pur vero che comunuque la soluzione ottima non cambia, poiché dipende solo dal rapporto tra le velocità e non dai loro valori.

Variabili.

Nella variante senza il recinto, per rappresentare la soluzione basta la variabile y_H, cioè l'ordinata del punto di ascissa nulla in cui il bagnino passa dalla spiaggia al mare.

Nella variante con il recinto, è utile introdurre anche variabili che rappresentano la posizione dei punti in cui il bagnino inizia e finisce di percorrere un arco di circonferenza intorno al perimetro del recinto. A questo scopo, la cosa più semplice è introdurre un angolo per ciascuno di questi punti. Indichiamo con τ_1 e τ_2 rispettivamente l'angolo corrispondente al punto iniziale e al punto finale. Per aiutare il solutore, può essere utile restringere il dominio di tali variabili; nell'esempio proposto si ha, per esempio, $\pi/2 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \pi$. Gli angoli sono misurati, come da solita convenzione, in senso antiorario a partire dal semiasse orizzontale delle ascisse.

Può essere comodo introdurre anche variabili ausiliarie D_1 e D_2 per rappresentare le distanze percorse sulla terra prima e dopo il recinto.

Vincoli.

Bisogna imporre che gli estremi dall'arco di circonferenza percorso dal bagnino siano punti di tangenza tra la circonferenza del recinto ed i due segmenti della traiettoria prima e dopo.

Utilizzando il teorema di Pitagora sul triangolo che ha i vertici in A, T ed il primo punto di tangenza si ha

$$D_1 = \sqrt{(x_A - x_T)^2 + (y_A - y_T)^2 - r_T^2}.$$

Si noti che D_1 dipende solo dai dati, non dalle variabili.

L'angolo τ_1 si ottiene dai vincoli

$$x_A + D_1 \sin \tau_1 = x_T + r_T \cos \tau_1$$

$$y_A - D_1 \cos \tau_1 = y_T + r_T \sin \tau_1.$$

Analogamente, imponendo che il segmento dal secondo punto di tangenza al punto H sia tangente alla circonferenza, si ha

$$-D_2 \sin \tau_2 = x_T + r_T \cos \tau_2$$

$$y_H + D_2 \cos \tau_2 = y_T + r_T \sin \tau_2.$$

Obiettivo.

L'obiettivo da massimizzare è la somma, pesata con l'inverso delle velocità, delle distanze percorse: si tratta di due segmenti rettilinei (prima e dopo il recinto) ed un arco di circonferenza (lungo il recinto) sulla terra ed un altro segmento rettilineo in mare.

$$\text{minimize } z = (D_1 + (\tau_1 - \tau_2)r_T + D_2)/v_A + \sqrt{x_B^2 + (y_B - y_H)^2}/v_B.$$

Il problema è di PNL nel continuo (in entrambe le versioni) e la soluzione calcolata dal solutore è garantita essere ottima, perché il problema è convesso. Infatti la lunghezza del primo segmento, dalla posizione iniziale al recinto, è costante. La lunghezza della traiettoria restante dipennde dalle due variabili α_2 e y_H. La lunghezza del segmento percorso in mare non dipende da α_2, ma è una funzione convessa di y_H. La lunghezza dell'arco di circonferenza non dipende da y_H ma è una funzione lineare (e quindi convessa) di α_2. La lunghezza del segmento tra il recinto ed il punto H dipende sia da α_2 che da y_H, ma fissando una delle due variabili è una funzione convessa dell'altra; quindi, è una funzione convessa. Ne consegue che la funzione-obiettivo è una somma di funzioni convesse di y_H e α_2 e quindi è anch'essa convessa.

La soluzione ottima nel caso senza il recinto è $y_H = 12.96$ metri, $z = 14.7$ secondi.

La soluzione ottima nel caso con il recinto è $\tau_1 = 2.95447$, $\tau_2 = 1.97852$, $y_H = 10.8594$.