

SEGNALI

SEGNALE : VETTORE di INFORMAZIONE (DEFINIZIONE)

Come RAPPRESENTO un SEGNALE ?

SEGNALE : GRANDEZZA FISICA, FUNZIONE di un'altra GRANDEZZA (es: Tempo, Spazio...)

SEGNALE : FUNZIONE : $y = f(x)$, $f: A \rightarrow B$
 $x \in A$: il DOMINIO di f
 $y \in B$: il CODOMINIO di f

Esempi : SUONO : pressione $P = f(\text{tempo})$, $t \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}$; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
IMMAGINE: Colore $C = f(\text{spazio})$, $s \in \mathbb{R}^2$, $C \in \mathbb{R}^3$; $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

CLASSIFICAZIONE di SEGNALI

Dato un SEGNALE $y = f(x)$ con $f: A \rightarrow B$, $\begin{cases} x \in A : \text{DOMINIO di } f \\ y \in B : \text{CODOMINIO di } f \end{cases}$

CONTINUITA' del DOMINIO A :

- un segnale $y = f(x)$, $x \in A$ è **SEGNALE CONTINUO** sse A è un INSIEME CONTINUO (es: $A \in \mathbb{R}$)
- un segnale $y = f(x)$, $x \in A$ è un **SEGNALE DISCRETO** sse A è un INSIEME DISCRETO (es: $A \in \mathbb{Z}$)

Es: SUONO : $p = f(t)$: $t \in \mathbb{R} \rightarrow$ segnale CONTINUO

$T_{\text{MIN}} \text{ GIORNALETTA} : T_{\text{MIN}} = f(n)$, $n \in \mathbb{Z} \rightarrow$ segnale DISCRETO

CONTINUITA' del CODOMINIO B :

- un segnale $y = f(x)$ è ad AMPIEZZE CONTINUE sse B è un INSIEME CONTINUO
- un segnale $y = f(x)$ è ad AMPIEZZE DISCRETE sse B è un INSIEME DISCRETO

Es: SUONO : $p = f(t)$, $p, t \in \mathbb{R} \rightarrow$ ad AMPIEZZE CONTINUE

SEGNALE LOGICO : $y = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $y = \{0, 1\} \rightarrow$ ad AMPIEZZE DISCRETE

CODOMINIO (B)	DOMINIO (A)	
	CONTINUO	DISCRETO
	$y = f(x)$	
CONTINUO	segnali ANALOGICI	segnali CAMPIONATI
DISCRETO	segnali QUANTIZZATO	segnale DIGITALE (o NUMERICO)

Esempio: segnale CD AUDIO: $y = f(mT)$, $T = \frac{1}{44100} \text{ s}$, $m \in \mathbb{Z} \rightarrow$ DISCRETO
 CD-AUDIO: segnale DIGITALE $y \in B = \{-32768 \dots +32767\} \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow$ AMPIEZZE DISCRETE

GRADO di CONOSCENZA di un SEGNALE

$y(t) = 2 + \cos(10\pi t)$; $t \in \mathbb{R} \rightarrow$ segnale DETERMINISTICO

$y(t) \rightarrow y(t, \omega) \rightarrow$ segnale NON DETERMINISTICO / CASUALE / ALEATORIO
 $\rightarrow$ REALIZZAZIONE del segnale

SEGNALI CONTINUI

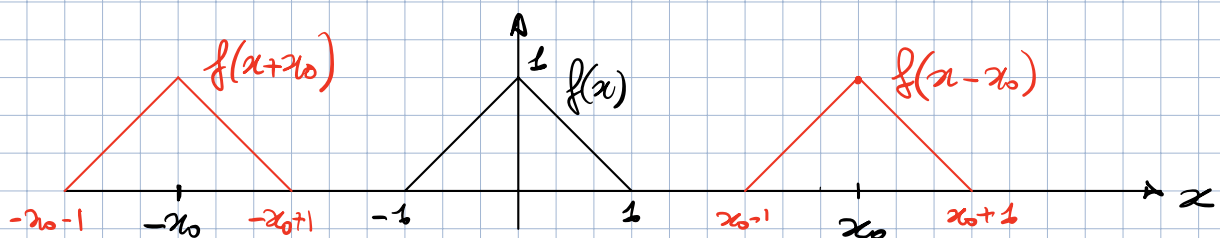
DEF: $y = f(x)$, $x \in A$ è CONTINUO (es: $A \equiv \mathbb{R}$)

OPERAZIONI sui SEGNALI CONTINUI:

TRASLAZIONE

Dato: $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

- $y' = f(x - x_0)$ TRASLAZIONE di f di x_0 (traslazione "IN AVANTI")
- $y'' = f(x + x_0)$ TRASLAZIONE di f di $(-x_0)$ (trasl. "ALL'INDIETRA")



Se x è il TEMPO (t): $y = f(t) \rightarrow \begin{cases} y' = f(t - t_0) & \text{RITARDO di } t_0 \\ y'' = f(t + t_0) & \text{ANTICIPO di } t_0 \end{cases}$

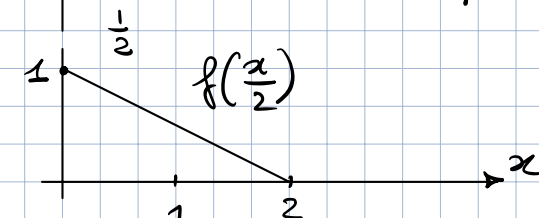
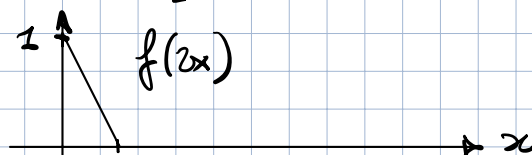
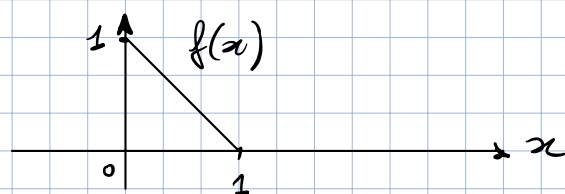
SCALATURA della VARIABLE INDIPENDENTE

Dato $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R} \rightarrow y' = f(ax)$ FATTORE $a \in \mathbb{R}$

$$y = \begin{cases} 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$y' = f(2x) = \begin{cases} 1 - 2x & 0 \leq 2x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$y'' = f\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 2$$

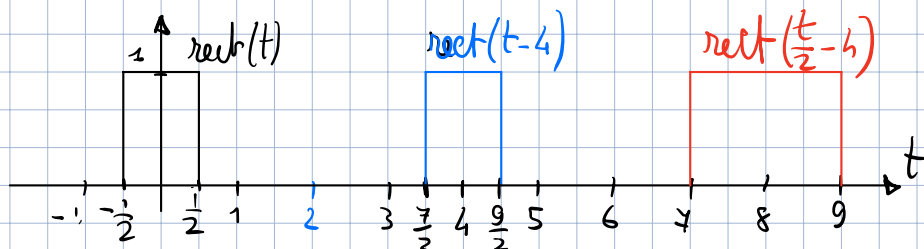


$|a| > 1 \rightarrow$ "COMPRESSIONE" sulle ASCISSE di un FATTORE a (CENTRATO in ORIGINE)

$|a| < 1 \rightarrow$ "ESPANSIONE" " " " " " " " "

$a < 0 \rightarrow$ RIBALTAMENTO SPECULARE sulle ASCISSE

Esempio: dato: $\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$, determinare $y = \text{rect}\left(\frac{t}{2} - 4\right)$



1) TRASLAZIONE: $t \rightarrow t - 4$

$$y' = \text{rect}(t - 4) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t - 4 \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \rightarrow \frac{7}{2} \leq t \leq \frac{9}{2}$$

2) SCALATURA: $t \rightarrow \frac{t}{2}$

$$y'' = y'\left(\frac{t}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{2} - 4\right) = \begin{cases} 1 & \frac{7}{2} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{9}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \rightarrow 7 \leq t \leq 9$$

$\text{rect}\left(\frac{t-8}{2}\right)$ CENTRO LARGHEZZA

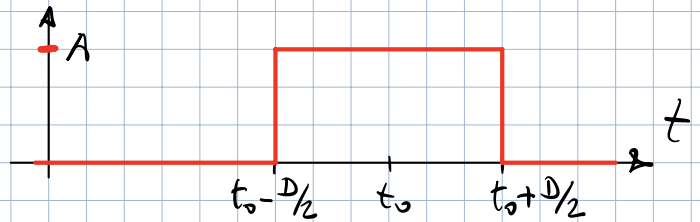
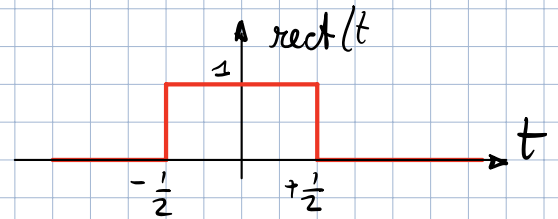
SEGNALI NOTEVOLI

- Funzione **RETTANGOLO** ("BOX", RECTANGLE, IMPULSO RETTANGOLARE)

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

In generale :

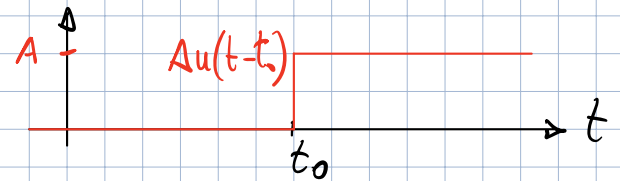
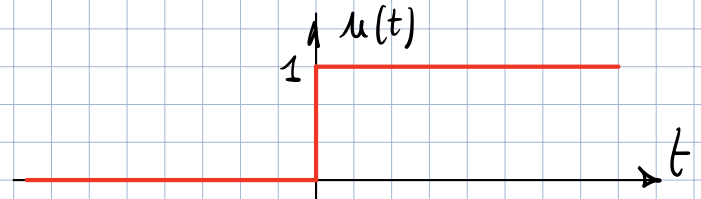
$$y = \underbrace{A}_{\text{AMPIEZZA}} \text{rect}\left(\frac{t - \underbrace{t_0}_{\text{CENTRATO in } t_0}}{\underbrace{D}_{\text{DURATA } D}}\right)$$



- GRADINO UNITARIO**

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

In generale : $y(t) = A u(t - t_0)$

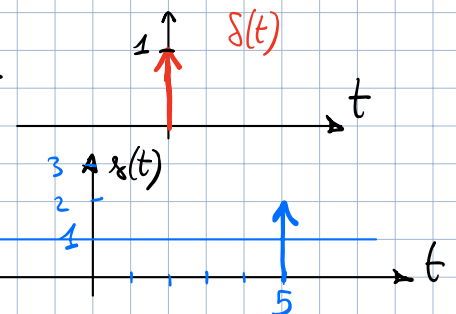
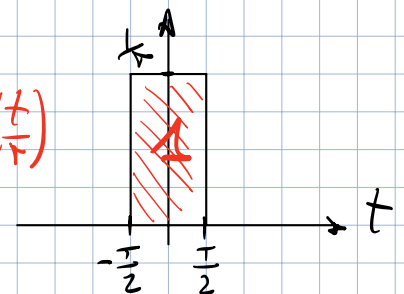


- IMPULSO IDEALE o "DELTA di DIRAC"**

Idealizzazione del concetto di IMPULSO

$$\text{DEF: } \delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



$\delta(t)$ è una **DISTRIBUZIONE** (NON una FUNZIONE)

→ SI DISEGNA COSÌ : →

Esempio : GRAFICA di : $x(t) = 1 + 2\delta(t - 5)$

PROPRIETÀ di $\delta(t)$:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ **AREA UNITARIA** di $\delta(t)$

definisco PRODOTTO SCALARE tra FUNZIONI : $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt$

- $\langle f(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0)$: PROPRIETÀ di CAMPIONAMENTO di $\delta(t)$

In generale : $\langle f(t), \delta(t-t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$

- PRODOTTO : $f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0) \delta(t-t_0)$

- PARITÀ : $\delta(t) = \delta(-t)$

- INTEGRAZIONE : $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} = u(t)$: GRADINO UNITARIO

• SEGNALI PERIODICI

$x(t)$ è PERIODICO SSE $x(t) = x(t+T), \forall t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) = x(t+kT)$
 $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}$

T : il PERIODO di $x(t)$ [s]

$1/T$: la FREQUENZA di $x(t)$ [Hz = s⁻¹]

Es: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t); \sin(2\pi f_0 t) \rightarrow \begin{cases} \text{PERIODO : } T = 1/f_0 \\ \text{FREQUENZA : } f = f_0 \end{cases}$

FASORE/SINUSOIDE COMPLESSA : $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)$

ATTRIBUTI di SEGNALI

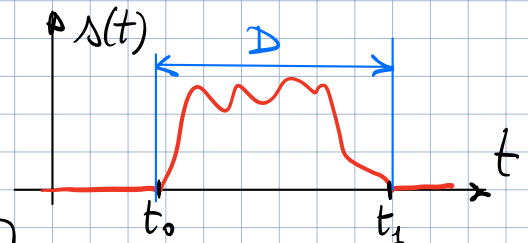
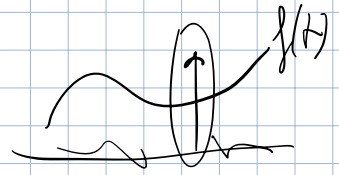
DURATA di un SEGNALE : ESTENSIONE del MINIMO INTERVALLO che contiene il SUPPORTO del segnale $x(t)$

SUPPORTO di $x(t)$: $[t_0, t_1]$

DURATA di $x(t)$: $D = t_1 - t_0$

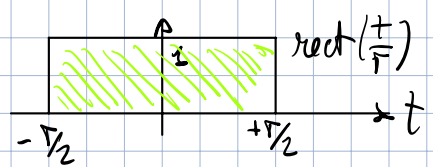
AREA di un segnale : AREA SOTTOESA da $x(t)$

Dato $x(t)$, AREA = $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$



Esempio: AREA di $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1 \cdot dt = T$$



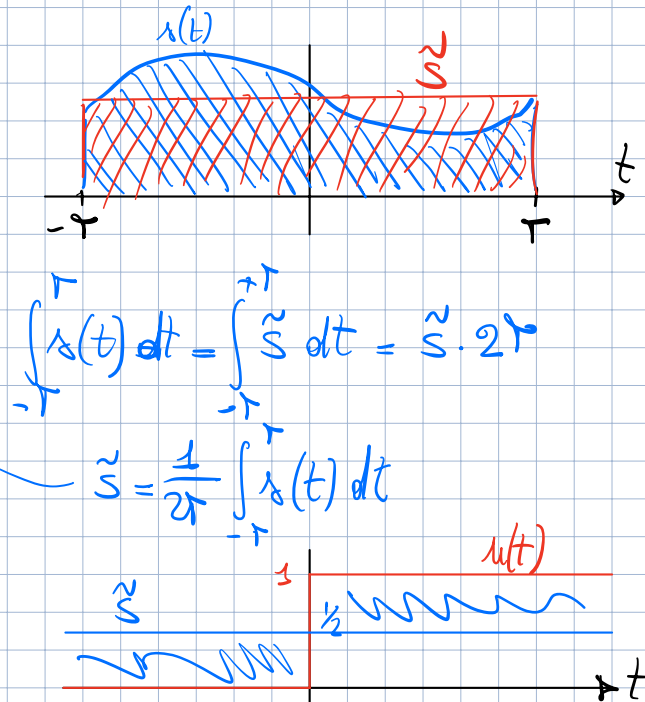
VALOR MEDIO di $x(t)$: il valore $\tilde{x}$ tale che la funzione $x(t) = \tilde{x}$ abbia la STESSA AREA di $x(t)$

$$\tilde{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt$$

Es: valor medio del GRADINO:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} T = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\int_{-T}^{+T} x(t) dt = \int_{-T}^{+T} \tilde{x} dt = \tilde{x} \cdot 2T$$

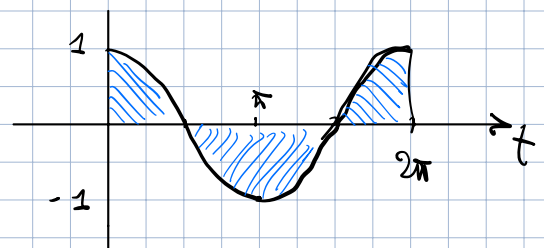
$$\tilde{x} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt$$

* Se $x(t)$ è PERIODICO $\rightarrow$ VALOR MEDIO è CALCOLABILE su 1 SOLO PERIODO

$$\hookrightarrow \tilde{x} = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

Es: $x(t) = \cos(t) \rightarrow$ PERIODO $T = 2\pi$

$$\rightarrow \tilde{x} = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\sin(t) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (\cancel{\sin 2\pi} - \cancel{\sin 0}) = 0$$



ENERGIA e POTENZA di un SEGNALE

POTENZA ISTANTANEA di $x(t)$:

Dato $x(t)$, DEF: $P(t) = x(t) \cdot \overline{x(t)} = |x(t)|^2 \in \mathbb{R}^+$

se $x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow P(t) = x^2(t)$

ENERGIA di $x(t)$: AREA delle POT. ISTANTANEA di $x(t)$:

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \geq 0, \in \mathbb{R} \quad \text{se } x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

POTENZA MEDIA di $x(t)$: VALOR MEDIO delle POT. ISTANTANEA di $x(t)$

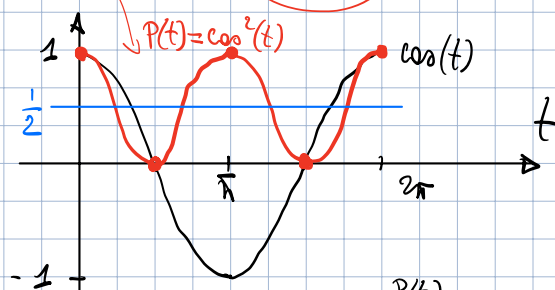
$$P_S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \geq 0, \in \mathbb{R}; \quad \text{se } x(t) \in \mathbb{R}, P_S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt$$

- Se $x(t)$ è PERIODICO $\rightarrow$ posso CALCOLARE P_S su 1 solo PERIODO

esempio: $x(t) = \cos(t) \rightarrow P(t) = \cos^2(t)$; $x(t)$ PERIODICO, $T = 2\pi$

$$P_S = \frac{1}{T} \int_T P(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \cos 2t dt \right] =$$

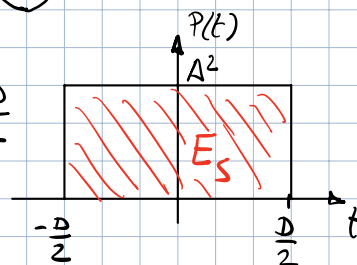
$$= \frac{1}{4\pi} \left[2\pi + \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[2\pi + \frac{1}{2} (\sin 4\pi - \sin 0) \right] = \frac{1}{4\pi} 2\pi = \frac{1}{2}$$



Esempi di calcolo di ENERGIA e POTENZA MEDIA

- $x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{D}\right) \in \mathbb{R}$

POT. ISTANTANEA: $P(t) = x^2(t) = A^2 \text{rect}^2\left(\frac{t}{D}\right) = A^2 \text{rect}\left(\frac{t}{D}\right) = \begin{cases} A^2 & -\frac{D}{2} \leq t \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} A^2 dt = A^2 D \quad E_S$$

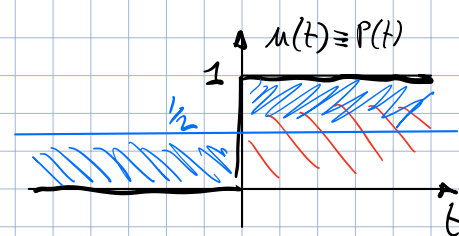
$$P_S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} A^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot A^2 D = 0 \quad P_S$$

- $x(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$

Def. ISANTANEA : $P(t) = u^2(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = u(t)$

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot dt = \infty \quad E_s$$

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2} \quad P_s$$



In sintesi:

$x(t)$ è un SEGNALE ENERGIA SSE $0 < E_s < \infty \rightarrow P_s = 0$

$x(t)$ è un SEGNALE POTENZA SSE $0 < P_s < \infty \rightarrow E_s = \infty$

SEGNALI DISCRETI

DEF: $y = f(x)$, $f: A \rightarrow B$; $\begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \rightarrow y \text{ è SEGNALE DISCRETO}$
SSE DOMINIO A: INSIEME DISCRETO

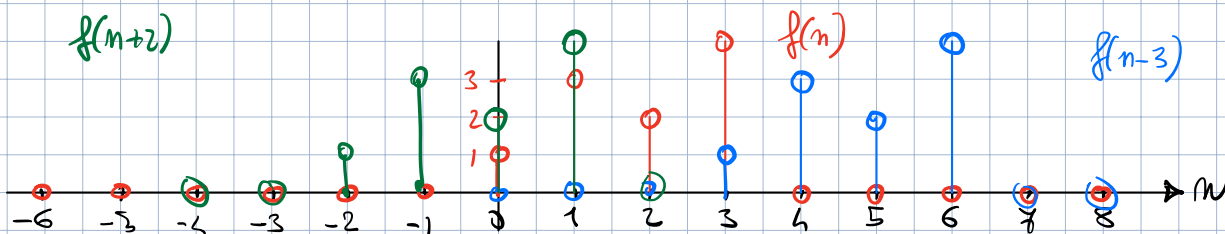
Se $A \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow$ SEGNALE DISCRETO : $y = f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$

OPERAZIONI su SEGNALE DISCRETI

TRASLAZIONE

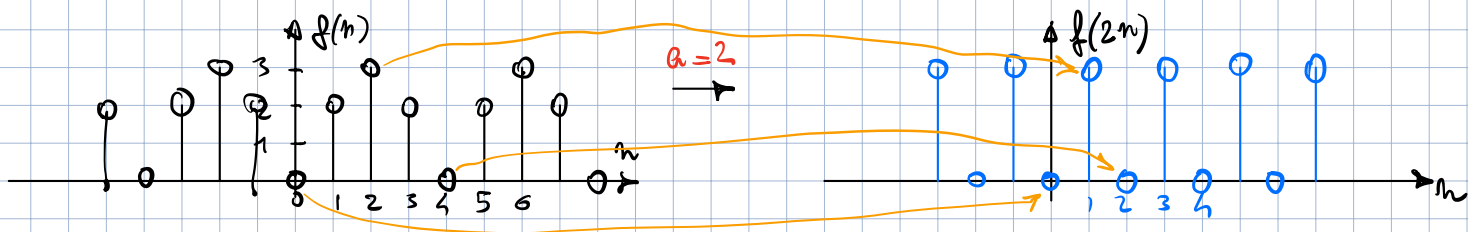
Dato $y = f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$

- $y' = f(n - n_0)$ traslab. IN AVANTI di n_0
- $y'' = f(n + n_0)$ TRASLAB. ALL'INDIETRO di n_0

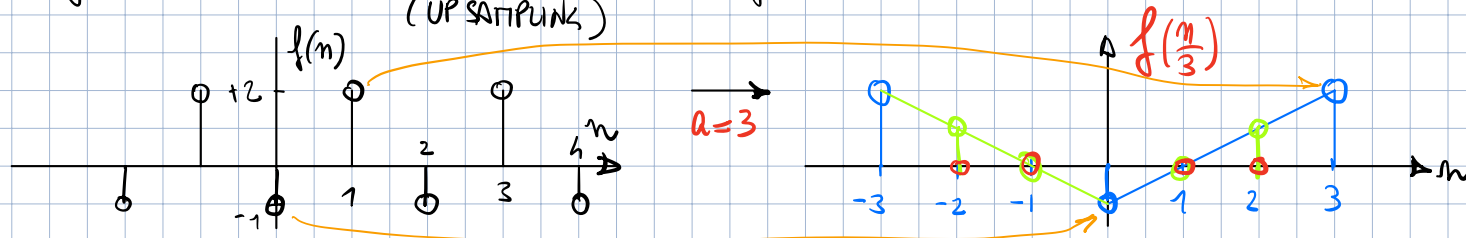


SCALATURA $\rightarrow$ DECIMAZIONE / INTERPOLAZIONE
(DOWN SAMPLING) (UP SAMPLING)

Dato $y = f(n)$ $n \in \mathbb{Z}$: DECIMAZIONE (DOWN SAMPLING) $y' = f(an)$ $a \in \mathbb{Z}$, $|a| > 1$



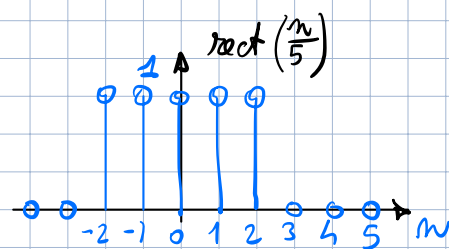
Dato $y = f(n)$ $n \in \mathbb{Z}$: INTERPOLAZIONE $y^n = f\left(\frac{n}{a}\right)$, $a \in \mathbb{Z}$ ($|a| > 1$)
(UPSAMPLING)



SEGNALI DISCRETI NOTEVOLI

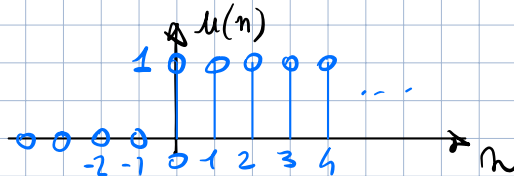
RETANGOLO DISCRETO

$$f(n) = \text{rect}\left(\frac{n}{D}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{D}{2} \leq n \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$



GRADINO UNITARIO DISCRETO

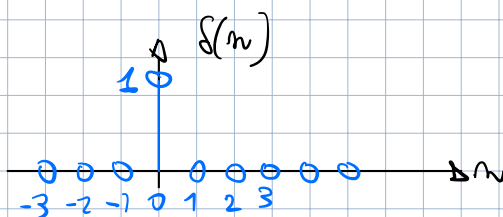
$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$



IMPULSO DISCRETO

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

è una FUNZIONE
(NON è una DISTRIBUZIONE)



PROPRIETÀ di $\delta(n)$:

- AREA UNITARIA: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) = 1$

- CAMPIONAMENTO: [PRODOTTO SCALARE DISCRETO: $\langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(n)$]

$$\langle f(n), \delta(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot \delta(n) = f(0)$$

$$\langle f(n), \delta(n-n_0) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(n-n_0) = f(n_0)$$

- PRODOTTO : $f(n) \delta(n - n_0) = f(n_0) \delta(n - n_0)$
- PARITÀ : $\delta(n) = \delta(-n)$
- INTEGRAZIONE (DISCRETA) : $\sum_{i=-\infty}^n \delta(i) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} = u(n)$ GRADINO DISCRETO

SEGNALI PERIODICI DISCRETI

Se : $x(n) = x(n + N)$, $n, N \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{Z} \rightarrow x(n) = x(n + kN)$, $n, N, k \in \mathbb{Z}$

$\downarrow$
 $x(n)$ è PERIODICO, con $\downarrow$ PERIODO = $N \in \mathbb{Z}$
 FREQUENZA $f = \frac{1}{N} \in \mathbb{Q}$ è RAZIONALE!

esempio : $x(n) = A \sin(2\pi f n)$, $f = \frac{1}{16} \rightarrow N = 16$