

ELABORAZIONE dei SEGNALI

PROGRAMMA del CORSO :

- PRELIMINARI : n. COMPLESSI, RADIANTI
- SEGNALI nel dominio dei TEMPI
- SISTEMI nel dominio dei TEMPI
- SEGNALI e SISTEMI nel dominio delle FREQUENZE
↳ SV. in SERIE di FOURIER, transf. di FOURIER
- CONVERSIONE ANALOGICO $\rightarrow$ DIGITALE
- SEGNALI e SISTEMI DISCRETI nella FREQUENZA
↳ DFT, DFT, Z
- PROGETTO di SISTEMI DIGITALI (FILTRI NUMERICI)

ANGOLI in RADIANTI

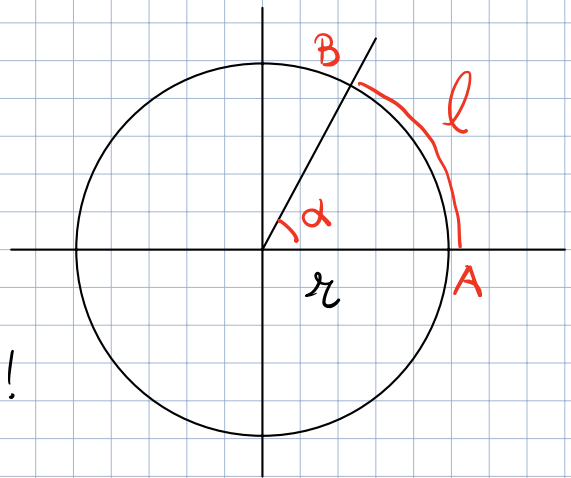
Dato circ. raggio r (arbitrario)

considerare ANGOLO α al CENTRO

$\rightarrow \alpha$ INDIVIDUA un ARCO $\widehat{AB}$ di lunghezza l

$$\text{DEF: } \alpha_{\text{RAD}} = \frac{l}{r}$$

$\rightarrow$ α ADIMENSIONALE
 $\rightarrow$ NON DIPENDE da r !



ES: angolo GIRO (360°)

$$\alpha_{\text{RAD}} = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Angolo PIATTO (180°)

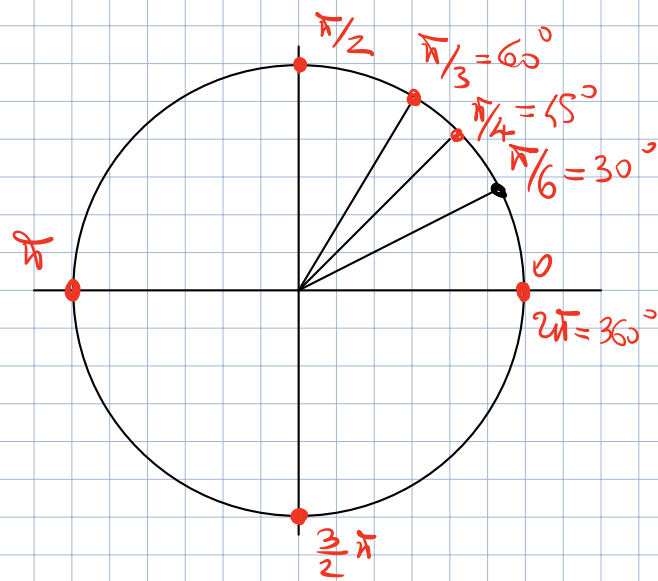
$$\alpha_{\text{RAD}} = \frac{l}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

Generalizzando: $\alpha_{\text{RAD}} : \pi = \alpha^\circ : 180 \rightarrow$

ANGOLI NOTEVOLI :

$$\alpha_{\text{RAD}} = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$$
$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha_{\text{RAD}}$$

α°	α_{RAD}
180	π
90	$\pi/2$
60	$\pi/3$
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$



CICLICITÀ degli ANGOLI :

$$\alpha^\circ = \alpha^\circ + k \cdot 360$$

$$\alpha_{RAD} = \alpha_{RAD} + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

NUMERI COMPLESSI

NUMERI COMPLESSI costituiscono un CAMPO SIMMETRICO: $\mathbb{C}$
 ↳ è la CHIUSURA ALGEBRICA di $\mathbb{R}$:

Un POLINOMIO COMPLESSO (coeff. COMPLESSI) di GRADO N
 ha SEMPRE N SOLUZIONI in $\mathbb{C}$ (o RADICI)

$$P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

↳ $\exists (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{C}$ tali che $P(x_i) = 0$, $i = 1 \dots N$
 (N valori di x che AZZERANO il Polinomio)

Per poter definire il campo $\mathbb{C}$ introduco l'UNITÀ IMMAGINARIA:

$$\text{UNITÀ IMMAGINARIA: } j = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{I}$$

NUMERO COMPLESSO : SOMMA di DUE COMPONENTI : $\begin{cases} \text{parte REALE} \\ \text{parte IMMAGINARIA} \end{cases}$

$$z \in \mathbb{C} \rightarrow z = \underbrace{x}_{\text{parte REALE}} + j \underbrace{y}_{\text{parte IMMAGINARIA}}, \quad \begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ j = \sqrt{-1} \in \mathbb{I}, \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

RAPPRESENTAZIONE dei NUMERI COMPLESSI

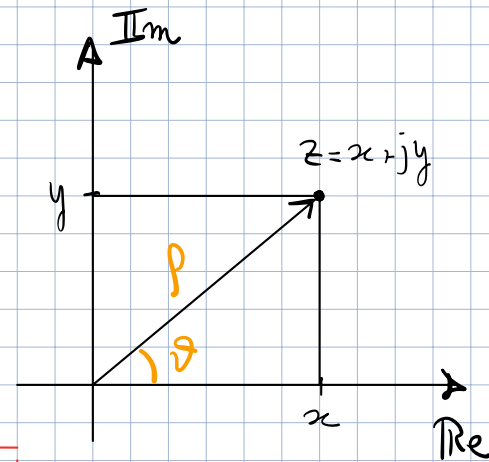
$$z \in \mathbb{C} ; z = x + jy \leftrightarrow \langle x, y \rangle$$

la rapp. più naturale è uno spazio 2D

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{ASCISSA}$$

$$y \in \mathbb{R} \rightarrow \text{ORDINATA}$$

PIANO di
GAUSS:



$$z \in \mathbb{C} : z = x + jy \leftrightarrow \langle x, y \rangle$$

RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA di $z \in \mathbb{C}$

COORDINATE
RETANGOLARI

Posso definire z anche in COORDINATE POLARI :

$$z \leftrightarrow \langle \underbrace{\rho}_{\text{MODULO di } z}, \underbrace{\vartheta}_{\text{FASE di } z} \rangle \quad \text{dove : } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

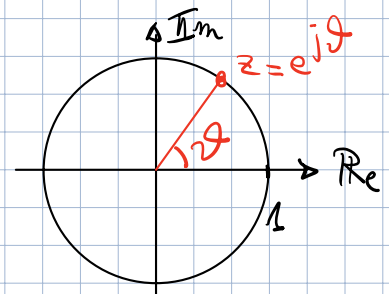
EULERO ha introdotto l'ESPOENZIALE COMPLESSO :

$$z = e^{j\vartheta} : \text{MODULO} = 1, \text{FASE} = \vartheta$$

Allora posso scrivere z come :

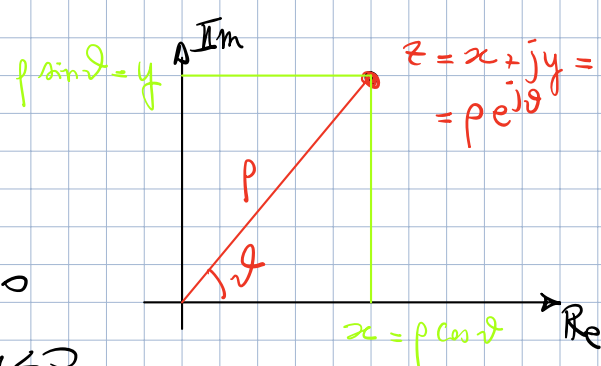
$$z \in \mathbb{C} : z = \rho \cdot e^{j\vartheta} \leftrightarrow \langle \rho, \vartheta \rangle$$

RAPPRESENTAZIONE ESPONENZIALE di z



In sintesi :

$$z \in \mathbb{C} : z = x + jy = \underbrace{p}_{\text{F. ALGEBRICO}} \cdot \underbrace{e^{j\vartheta}}_{\text{F. ESPONENZ.}}$$



$$\begin{cases} x = p \cdot \cos \vartheta \\ y = p \cdot \sin \vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} p = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

ESEMPIO:

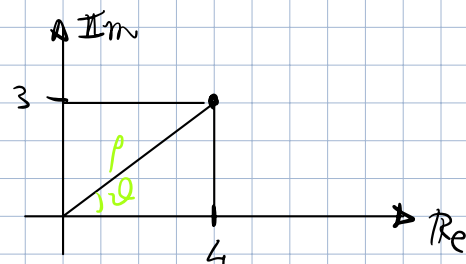
Considero $z = 4 + 3j$ (f. algebrico)

$$\text{Re}[z] = 4 ; \text{Im}[z] = 3$$

$$z = p e^{j\vartheta} : p = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 : \text{MODULO di } z : |z| = 5$$

$$\text{FASE di } z : \angle z = \vartheta = \text{atan2}(4, 3) = \arctan \frac{3}{4} \approx 0,6410 \text{ rad} \approx 37^\circ$$

$$z = 4 + 3j = 5 e^{0,64j} \rightarrow \text{in RADIANTI!}$$



CALCOLO di ATAN2():

Considero : $z = 1 + j : \langle 1, 1 \rangle$

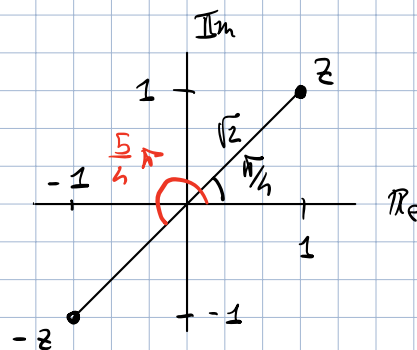
$$\text{MODULO} : |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{FASE} : \angle z = \text{atan2}(1, 1) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

Considero : $-z = -1 - j : \langle -1, -1 \rangle$

$$\text{MODULO} : |-z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{FASE} : \angle(-z) = \text{atan2}(-1, -1) = \pi + \arctan \frac{-1}{-1} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4} \pi$$



OPERAZIONI con NUMERI COMPLESSI

SOMMA (e SOTTRAZIONE)

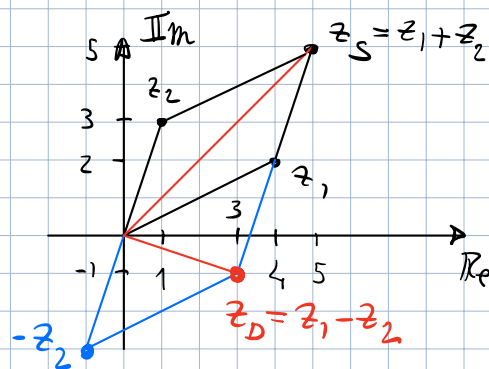
• in forma ALGEBRICO:

$$\text{Dati : } \begin{cases} z_1 = x_1 + jy_1 \\ z_2 = x_2 + jy_2 \end{cases} \rightarrow z_s = z_1 + z_2 = \underbrace{x_1 + x_2}_{x_s} + j \underbrace{(y_1 + y_2)}_{y_s}$$

→ sommo le componenti Re e Im INDIPENDENTEMENTE
Sul PIANO d'GAUSS:

SOTTRAZIONE: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

→ $z_D = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$



• in forme ESPONENZIALE:

$$\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2} \end{cases} \quad z_S = z_1 + z_2 = ? \text{ DIFFICILE } \rightarrow \begin{cases} \text{CONVERTO } z_1 \text{ e } z_2 \text{ in} \\ \text{F. ALGEBRAICA e SOMMO} \end{cases}$$

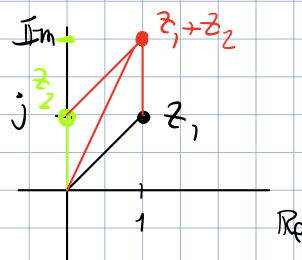
ESEMPIO:

dati: $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2} e^{j\pi/4} \\ z_2 = e^{j\pi/2} \end{cases} \quad z_1 + z_2 = ? \rightarrow \text{converto in f. ALGEBRAICA:}$

$z_1 = \text{Re}[z] + j \text{Im}[z] = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + j \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + j \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + j$

$z_2 = e^{j\pi/2} = 1 \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = 0 + j = j$

$z_S = z_1 + z_2 = 1 + j + j = 1 + 2j$

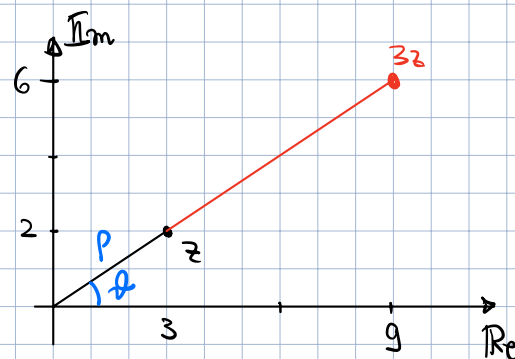


SCALATURA (MOLTIPLICAZ. per numero REALE)

• in forme ALGEBRAICA

Dati: $\begin{cases} z = x + jy \in \mathbb{C} \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow az = \underbrace{ax}_{\text{Re}} + j \underbrace{ay}_{\text{Im}}$

moltiplico per a ENTRAMBE le COMPONENTI



• in forme ESPONENZIALE:

Dati: $\begin{cases} z = \rho e^{j\theta} \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow az = a\rho e^{j\theta} \quad \begin{cases} \text{MODULO: moltiplicato per } a \\ \text{FASE: INVARIATA} \end{cases}$

PRODOTTO di numeri COMPLESSI

In forma ALGEBRICA: sfruttando l'algebra, ricordando che $j^2 = -1$:

$$\text{Dati: } \begin{cases} z_1 = x_1 + jy_1 \\ z_2 = x_2 + jy_2 \end{cases} \rightarrow z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jy_1 x_2 - y_1 y_2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2) = x_p + jy_p = z_p$$

In forma ESPONENZIALE:

$$\text{dati: } \begin{cases} z_1 = p_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = p_2 e^{j\theta_2} \end{cases} \rightarrow z_p = p_p e^{j\theta_p} \quad p_p, \theta_p ?$$

$$\begin{cases} p_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2} = \dots = p_1 p_2 \\ \theta_p = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$

$$\text{Quindi: } \begin{cases} z_1 = p_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = p_2 e^{j\theta_2} \end{cases} \rightarrow z_p = z_1 \cdot z_2 = p_p e^{j\theta_p} = p_1 p_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

MODULO: PRODOTTO MODULI
FASE: SOMMA FASI

ESEMPIO: $\begin{cases} z_1 = 1+j \\ z_2 = 3-3j \end{cases}$ calcolare $z_1 \cdot z_2$

in forma ALGEBRICA:

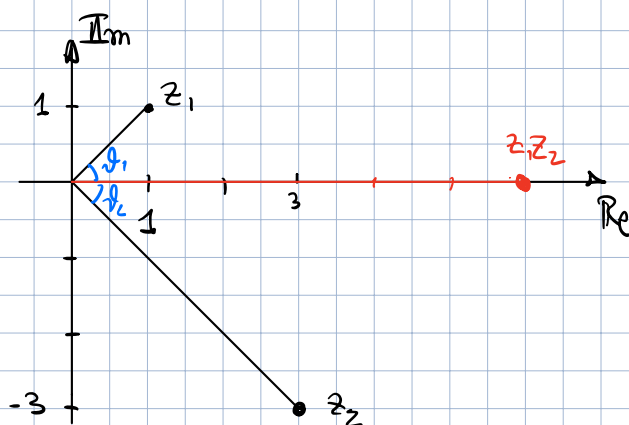
$$z_1 z_2 = (1+j)(3-3j) = 3 - 3j + 3j + 3 = 6$$

in forma ESPONENZIALE:

$$z_1 = 1+j = p_1 e^{j\theta_1} = \sqrt{1^2+1^2} e^{j \arctan \frac{1}{1}} = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = 3-3j = \sqrt{3^2+3^2} e^{j \arctan \frac{-3}{3}} = 3\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\rightarrow z_1 z_2 = p_1 p_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = \sqrt{2} 3\sqrt{2} e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})} = 6 \cdot e^{j0} = 6 \quad \checkmark$$



COMPLESSO CONIUGATO di un numero complesso

Dato $z \in \mathbb{C}$, si definisce COMPLESSO CONIUGATO di z : $\bar{z}$ (o z^*) il numero con:

- $\begin{cases} \bullet \text{ la STESSA parte REALE di } z \\ \bullet \text{ parte IMMAGINARIA OPPOSTA} \end{cases}$; $\begin{cases} \bullet \text{ STESSO MODULO di } z \\ \bullet \text{ FASE OPPOSTA} \end{cases}$

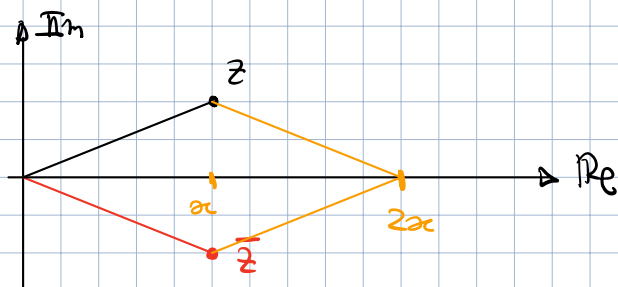
$$z \in \mathbb{C}, \quad z = x + jy = p e^{j\theta} \rightarrow \bar{z} = x - jy = p e^{-j\theta}$$

PROPRIETÀ:

- $z + \bar{z} = x + jy + x - jy = 2x = 2\operatorname{Re}[z] \in \mathbb{R}$ è REALE
- $z \cdot \bar{z} = (x + jy)(x - jy) = x^2 - jy^2 + jy^2 + y^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 = |z|^2 \geq 0$ è REALE e POSITIVO

Sul PIANO di GAUSS:

$\bar{z}$ è SPECULARE a z rispetto all'asse Re



INVERSO di un n. complesso

Dato $z \in \mathbb{C}$, definisco INVERSO: z^{-1} tale che: $z \cdot z^{-1} = 1$

- in forma ESPONENZIALE: $z = \rho e^{j\theta} \rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-j\theta}$
verifica: $z \cdot z^{-1} = \rho e^{j\theta} \cdot \frac{1}{\rho} e^{-j\theta} = 1 e^{j(\theta-\theta)} = 1 \quad \checkmark$

- in forma ALGEBRICA:

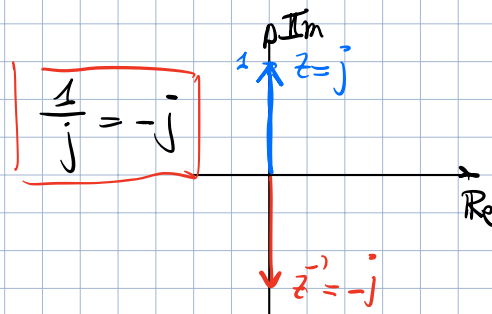
ricordo che: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \rightarrow \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1 \rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

dato $z = x + jy \rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$

ESEMPIO: INVERSO di $z = j$

f. ESP: $z = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \rightarrow z^{-1} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

f. ALG.: $z = j \rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-j}{0^2 + 1^2} = -j$



DIVISIONE tra NUMERI COMPLESSI

→ MOLTIPLICAZIONE per l'INVERSO:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

in forma ESPONENZIALE:

dati $\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2} \end{cases} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} e^{-j\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Modulo: RAPPORTO MODULI
FASE: DIFFERENZA FASI

in forma ALGEBRICA:

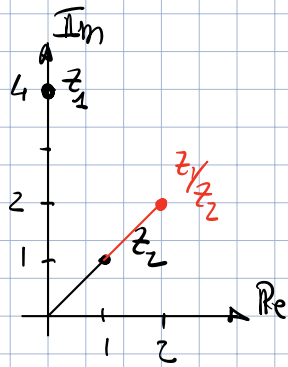
$$\text{def: } \begin{cases} z_1 = x_1 + jy_1 \\ z_2 = x_2 + jy_2 \end{cases} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

ESEMPIO:

def: $z_1 = 4j$, $z_2 = 1 + j$, calcolare $\frac{z_1}{z_2}$

$$\text{ALG: } \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = 4j \cdot \frac{1-j}{1^2+1^2} = 2j(1-j) = 2j + 2 = 2 + 2j$$

$$\text{ESP: } \begin{cases} z_1 = 4e^{j\frac{\pi}{2}} \\ z_2 = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \end{cases} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$



RAZIONALIZZAZIONE di FRAZIONI COMPLESSE

$$z = \frac{4-j}{1+3j} = \frac{z_1}{z_2}$$

Razionalizzare $\rightarrow$ DENOMINATORE REALE

$$z = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$$z = \frac{4-j}{1+3j} = \frac{(4-j)(1-3j)}{1^2+3^2} = \frac{4-12j-j-3}{10} = \frac{1-13j}{10} = \frac{1}{10} - \frac{13}{10}j$$

ELEVAMENTO a POTENZA

In forma ESPONENZIALE:

$$z = \rho e^{j\theta} \rightarrow z^n = \overbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}^{n \text{ VOLTE}} = \rho^n e^{jn\theta} \quad \begin{array}{l} \text{- MODULO ELEVATO a n-ESIMA} \\ \text{- FASE MOLTIPL. n} \end{array}$$

In forma ALGEBRICA: svolgo algebricamente

$$z = x + jy \rightarrow z^n = (x + jy)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} jy + \dots + (jy)^n$$

ESTRAZIONE di RADICE n-ESIMA

$$\text{Def: } y = \sqrt[n]{z} \quad \text{sse } y^n = z \quad y, z \in \mathbb{C} \quad n \in \mathbb{Z}$$

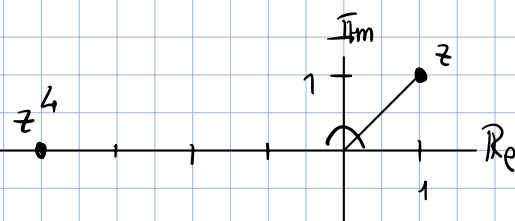
$\rightarrow y^m - z = 0$: POLINOMIO di GRADO m in $y \rightarrow m$ SOLUZIONI in $\mathbb{C}$

Dato: $z = \rho e^{j\theta} \rightarrow y_i = \sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{\rho} e^{j \frac{\theta + 2\pi i}{m}} ; i = 0, 1, \dots, m-1$

Verifica: $y_i^m = (\sqrt[m]{\rho})^m e^{j \frac{\theta + 2\pi i}{m} \cdot m} = \rho e^{j(\theta + 2\pi i)} = \rho e^{j\theta} = z, \forall i \quad \checkmark$

ESEMPIO:

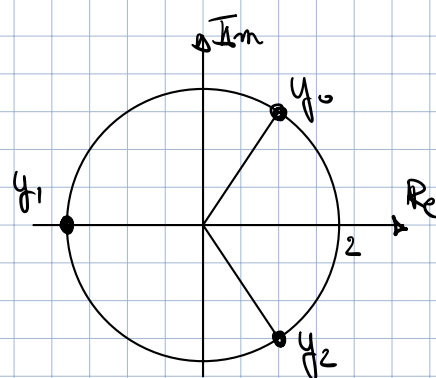
$z = (1+j)^4 = (\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}})^4 = (\sqrt{2})^4 e^{j\pi} = 4e^{j\pi} = -4$



Calcolo: $y = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8e^{j\pi}}$

$\rightarrow y_i = \sqrt[3]{8e^{j\pi}} = \sqrt[3]{8} e^{j \frac{\pi + 2\pi i}{3}}, i = 0, 1, 2$

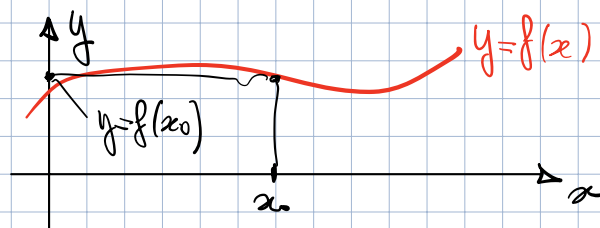
$$\begin{cases} y_0 = 2e^{j\frac{\pi}{3}} \rightarrow y_0^3 = 2^3 e^{j\frac{\pi}{3} \cdot 3} = 8e^{j\pi} = -8 \\ y_1 = 2e^{j\pi} \rightarrow y_1^3 = 2^3 e^{j\pi \cdot 3} = 8e^{j3\pi} = -8 \\ y_2 = 2e^{j\frac{5\pi}{3}} \rightarrow y_2^3 = 2^3 e^{j\frac{5\pi}{3} \cdot 3} = 8e^{j5\pi} = -8 \end{cases}$$



FUNZIONI COMPLESSE di VARIABILE REALE

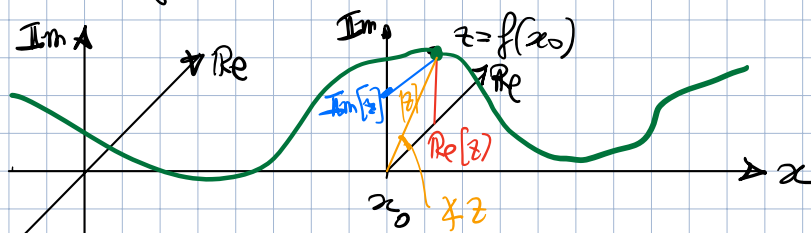
Funzione REALE di VAR. REALE:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = f(x)$



Funzione COMPLESSA di VAR. REALE:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : z = f(x), x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$



La posso rappresentare con 2 FUNZIONI $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Rappres. ALGEBRICA di $z = f(x)$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[z] = \operatorname{Re}[f(x)] \\ \operatorname{Im}[z] = \operatorname{Im}[f(x)] \end{cases} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Rappres. ESPONENZIALE di $z = f(x)$

$$\begin{aligned} |z| &= |f(x)| \in \mathbb{R}^+ \\ \angle z &= \angle f(x) \in \mathbb{R} \quad (0 - 2\pi) \end{aligned}$$

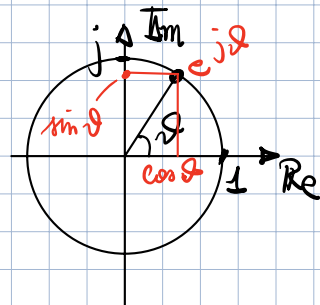
ESEMPIO di funzione COMPLESSA:

la SINUSOIDE COMPLESSA, o FASORE (o ESPONENZIALE COMPLESSO)

DEF: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : z = f(x) = A e^{jx}$, $x \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{C}$

FORMULA di EULERO: $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

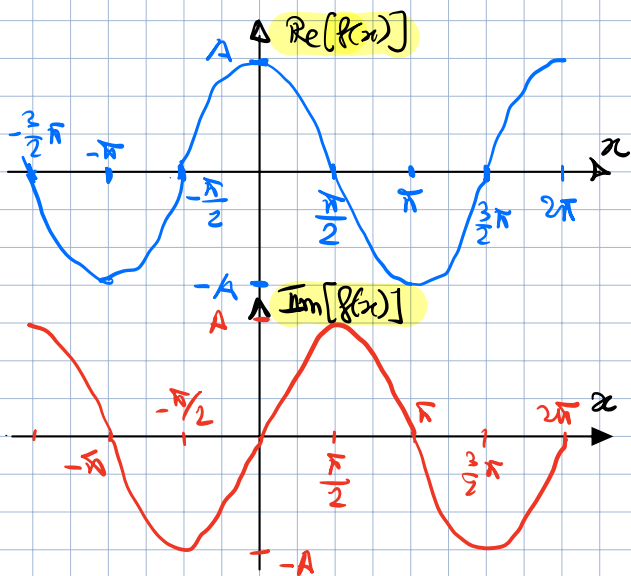
$$z = f(x) = \underbrace{A \cos x}_{\operatorname{Re}[z]} + j \underbrace{A \sin x}_{\operatorname{Im}[z]}$$



RAPPRESENT. ALGEBRICA di $z = f(x)$:

$$\operatorname{Re}[z] = \operatorname{Re}[f(x)] = A \cos(x)$$

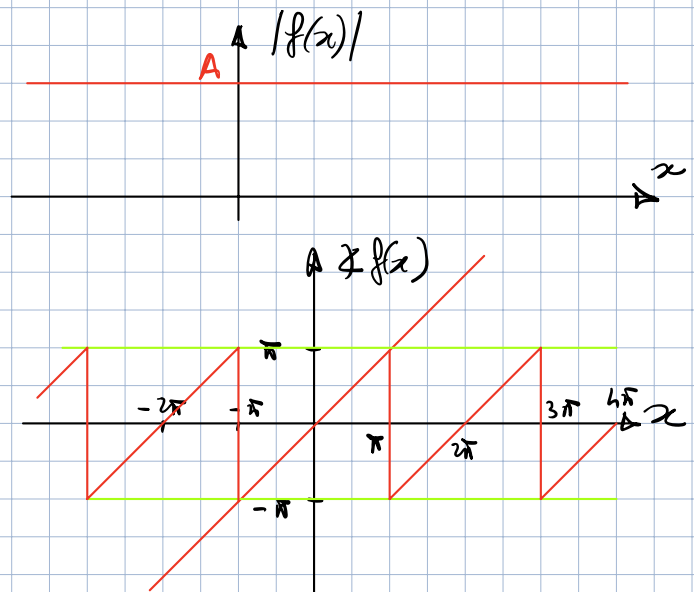
$$\operatorname{Im}[z] = \operatorname{Im}[f(x)] = A \sin(x)$$



Rappres. ESPONENZIALE ($|z|$, $\angle z$)

$$|z| = |f(x)| = A$$

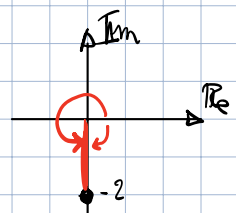
$$\angle z = \angle f(x) = x$$



ESERCIO di RIPILOGO

• Calcolare: $z = \frac{3+4j}{-2j}$ in f. ALG. e ESP.

forme ALG: $z = \frac{3+4j}{-2j} \cdot \frac{2j}{2j} = \frac{(3+4j) \cdot 2j}{-2} = \frac{3j-4}{-2} = -2 + \frac{3}{2}j$



forma EXP: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3+j}{-2j}$; $z_1 = 3+j = \sqrt{3^2+1^2} e^{j \arctan \frac{1}{3}} = 5 e^{j 0,3\pi}$; $z_2 = -2j = 2 e^{-j \frac{\pi}{2}}$

$$\rightarrow z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(43,7^\circ - 90^\circ)} = \frac{5}{2} e^{j 0,8\pi}$$

Calcolare $z = 3\sqrt{2} e^{j \frac{\pi}{4}} + \frac{(2j)^2}{1+j}$ = (SOMMA $\rightarrow$ CONVIENE la forma algebrica)

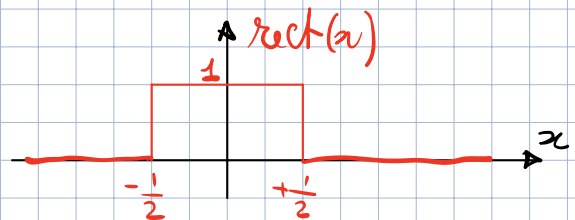
$$3\sqrt{2} e^{j \frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3 + 3j$$

$$\frac{-4}{1+j} \cdot \frac{1-j}{1-j} = \frac{-4+4j}{2} = -2+2j$$

$$\rightarrow z = 3 + 3j + (-2 + 2j) = 1 + 5j$$

Rappresentare graficamente la funzione: $y(x) = \text{rect}(x) e^{j2\pi x}$

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



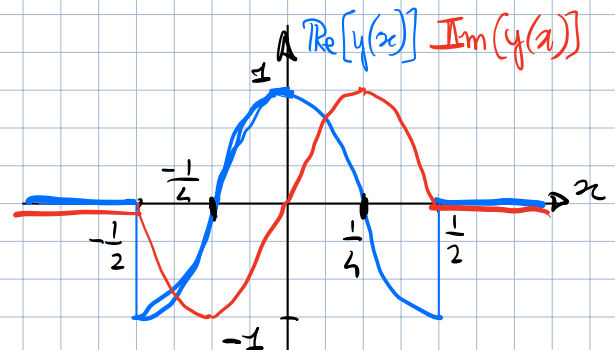
$$\rightarrow y(x) = \begin{cases} e^{j2\pi x} & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{C}$$

a) rapp. ALGEBRICA: $\text{Re}[y(x)]$; $\text{Im}[y(x)]$ (utilizzando f. EULERO).

$$y(x) = \begin{cases} e^{j2\pi x} = \underbrace{\cos(2\pi x)}_{\text{Re } y_{\text{Re}}(x)} + j \underbrace{\sin(2\pi x)}_{\text{Im } y_{\text{Im}}(x)}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

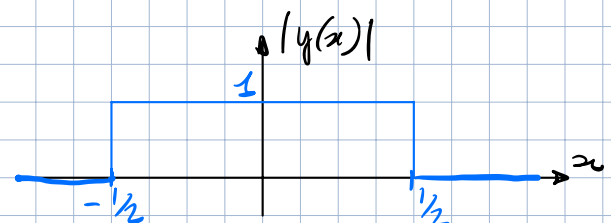
$$y_{\text{Re}}(x) = \text{Re}[y(x)] = \begin{cases} \cos 2\pi x & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$y_{\text{Im}}(x) = \text{Im}[y(x)] = \begin{cases} \sin 2\pi x & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



b) Rapp. ESPONENZIALE: MODULO e FASE

$$|y(x)| = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \text{rect}(x)$$



$$f_y(x) = \begin{cases} 2\pi x & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \# & \text{altrove} \end{cases}$$

Se $|z|=0 \rightarrow f_z$ NON ESISTE!!

