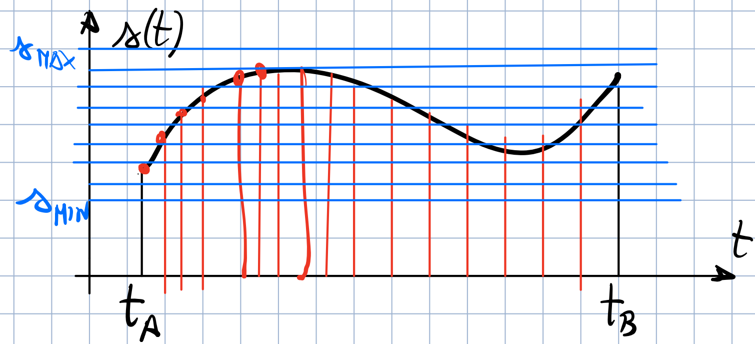
CONVERSIONE ANALOGICO / DIGITALE

Considero un segnale $s(t)$

$s(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

segnale ANALOGICO



Per RAPPRESENTARE $s(t)$ con un SISTEMA DIGITALE devo:

1) DISCRETIZZARE l'asse dei TEMPI $\longrightarrow$ CAMPIONAMENTO

$$s(t),\ t \in \mathbb{R},\ t_A \le t \le t_B \longrightarrow s(t_i),\ t_A \le t_i \le t_B,\ i = 1 \dots N$$

2) DISCRETIZZARE le AMPIEZZE $\longrightarrow$ QUANTIZZAZIONE

$$s(t_i),\ s(t_i) \in \mathbb{R},\ S_{MIN} \le s(t) \le S_{MAX} \longrightarrow s_q(t_i),\ s_q \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_M\}$$

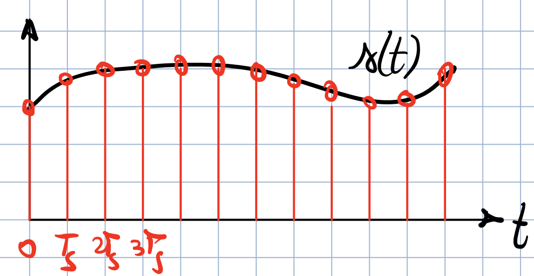
CONVERSIONE ANALOGICO → DIGITALE:

$$s(t), \begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ s(t) \in \mathbb{R} \end{cases}, \ t_A \le t \le t_B \xrightarrow{A \to D} s_q(t_i), \begin{cases} t_A \le t_i \le t_B,\ i = 1 \dots N \\ s_q \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_M\} \end{cases}$$

CAMPIONAMENTO (UNIFORME)

"Passo" di campionamento COSTANTE T_s

T_s : PERIODO di CAMPIONAMENTO [s]



$$\boxed{\text{CAMPIONAM. UNIFORME : } s(t),\ t \in \mathbb{R} \longrightarrow \underbrace{s(nT_s) := s(n)}_{\text{SEGNALE DISCRETO}},\ n \in \mathbb{Z}}$$

$f_s = \dfrac{1}{T_s}$: FREQUENZA di CAMPIONAMENTO $[s^{-1} = Hz]$

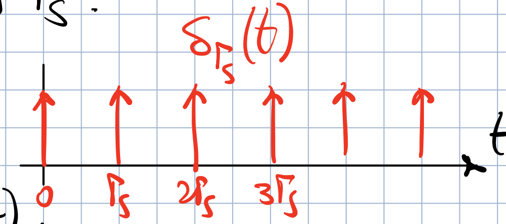
Come rappresentare MATEMATICAMENTE il CAMPIONAM. UNIFORME?

$$s(t) \longrightarrow s(t_0) \longrightarrow s(t)\,\delta(t-t_0) = s(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

CAMPIONAMENTO IDEALE : i CAMPIONI sono IMPULSI di DIRAC

→ definisco una SEQUENZA di IMPULSI a CADENZA T_S :

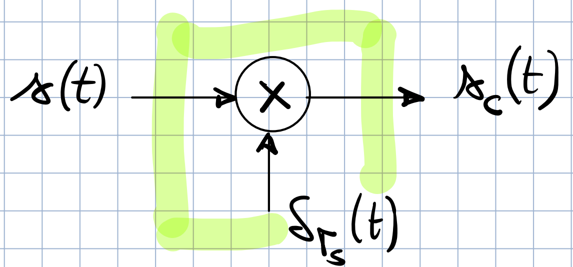
$$\delta_{T_S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_S)$$

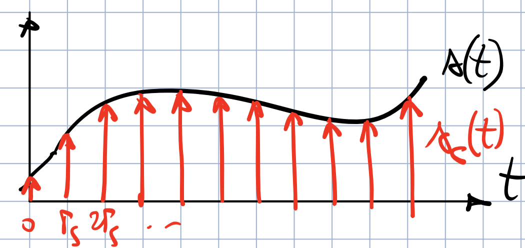


CAMPIONAMENTO IDEALE : PRODOTTO di $s(t)$ e $\delta_{T_S}(t)$:

$$s_c(t) = s(t)\cdot\delta_{T_S}(t) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_S)\,\delta(t-nT_S)$$

SEGNALE CAMPIONATO





SPETTRO del SEGNALE CAMPIONATO

$$s_c(t) = s(t)\cdot\delta_{T_S}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_c(f) = S(f) * \Delta_{T_S}(f)$$

Devo calcolare $\Delta_{T_S}(f)$: osservo che $\delta_{T_S}(t)$ è PERIODICO, periodo T_S

Calcolo la FS di $\delta_{T_S}(t)$:

$$\delta_{T_S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j2\pi\frac{n}{T_S}t}$$

Calcolo i coeff. c_n :

$$c_n = \frac{1}{T_S}\int_{-\frac{T_S}{2}}^{+\frac{T_S}{2}}\delta_{T_S}(t)\,e^{-j2\pi\frac{n}{T_S}t}\,dt = \frac{1}{T_S}\int_{-\frac{T_S}{2}}^{\frac{T_S}{2}}\delta(t)\,e^{-j2\pi\frac{n}{T_S}t}\,dt = \frac{1}{T_S}\cdot 1 = \frac{1}{T_S}, \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

Quindi : $\delta_{T_S}(t) = \frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{n}{T_S}t}$

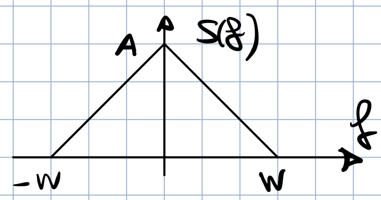
TRASFORMO :

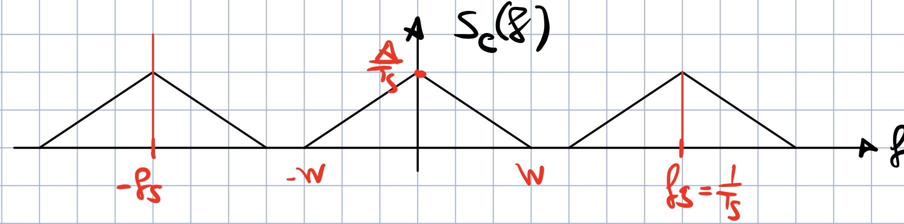
$$\Delta_{T_s}(f) = \mathcal{F}\{\delta_{T_s}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{\infty} {}_n\, e^{j2\pi\frac{n}{T_s}t}\right\} = (\text{x linearità}) =$$

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{\infty} {}_n\, \mathcal{F}\left\{e^{j2\pi\frac{n}{T_s}t}\right\} = \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{\infty} {}_n\, \delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$

Quindi:

$$S_c(f) = S(f) * \Delta_{T_s}(f) = S(f) * \left[\frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{\infty} {}_n\, \delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)\right] = \boxed{\frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n\, S\left(f-\frac{n}{T_s}\right)}$$





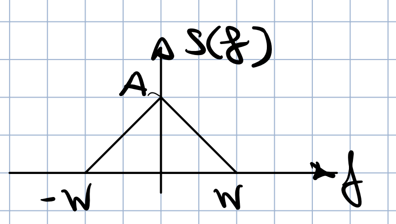
DUE SITUAZIONI POSSIBILI:

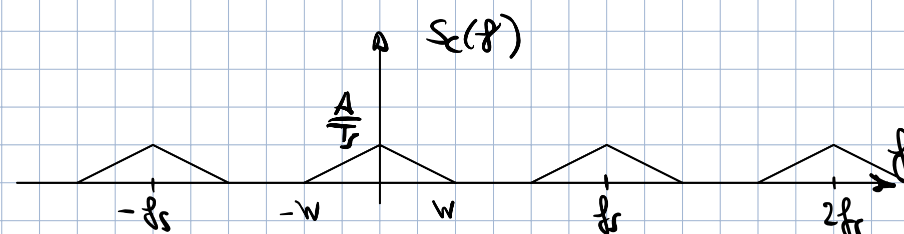
★ REPLICHE SPETTRALI di $S_c(f)$ DISGIUNTE: $f_s > 2W$ $(\rightarrow W < f_s/2)$

★ " " di $S_c(f)$ NON DISGIUNTE $(\rightarrow W > f_s/2)$

TEOREMA del CAMPIONAMENTO (NYQUIST-SHANNON, 1928)

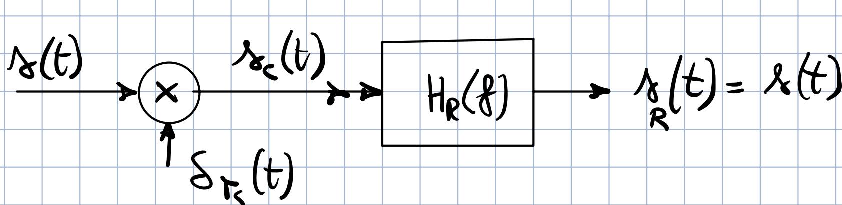
Un SEGNALE con BANDA LIMITATA SUPERIORMENTE a W può essere RICOSTRUITO UNIVOCAMENTE a partire dai suoi CAMPIONI sse il CAMPIONAMENTO AVVIENE a FREQUENZA $f_s > 2W$





Se: $\boxed{W < \frac{f_s}{2} = f_N}$ → è POSSIBILE la RICOSTRUZIONE di $s(t)$ da $s_c(t)$!

RICOSTRUZIONE



Serve un PASSA-BASSO IDEALE, GUADAGNO $= T_s$, $f_T = f_N = f_s/2$

FILTRO di RICOSTRUZIONE:

$$H_R(f) = \begin{cases} T_s, & |f| \le f_N = f_s/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = T_s \,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = T_s \,\mathrm{rect}(f \cdot T_s)$$

Verifica:

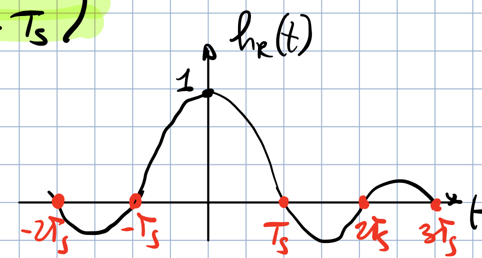
$$S_R(f) = S_c(f) \cdot H_R(f) = \cancel{\frac{1}{T_s}} \sum_{-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \cdot \cancel{T_s}\, \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = S(f) \quad \checkmark$$

RICOSTRUZIONE nel DOMINIO dei TEMPI:

$$S(f) = S_c(f) \cdot H_R(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} s(t) = s_c(t) * h_R(t)$$

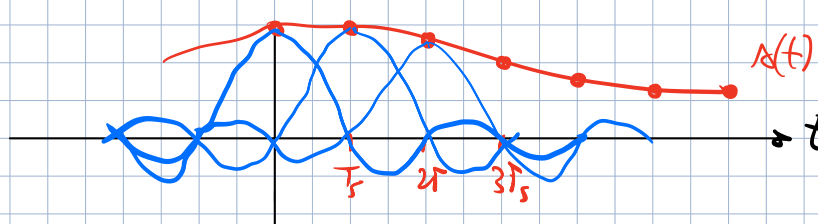
Ma $\quad H_R(f) = \frac{1}{f_s} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h_R(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$

$$\rightarrow h_R(t = nT_s) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \ne 0 \end{cases}$$



$$s(t) = s_c(t) * h_R(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} s(nT_s)\,\delta(t - nT_s) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) =$$

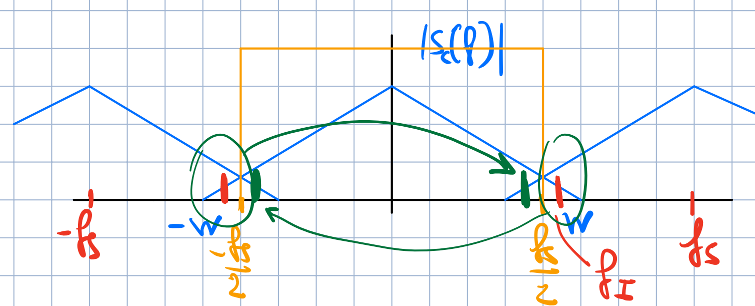
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} s(nT_s)\left[\delta(t - nT_s) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} s(nT_s)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$



COSA SUCCEDE se $f_s > 2W$ **NON** viene RISPETTATO?

$f_I > W \longrightarrow f_s - f_I < W$

ALIASING (o EQUIVOCAZIONE)

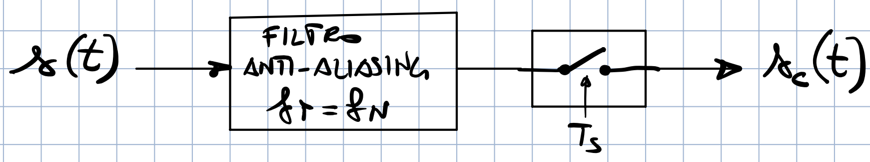


COME EVITO l'ALIASING?

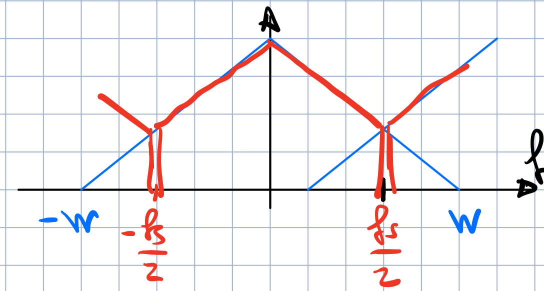
1) Se $s(t)$ è DATO → DATA W ⟶ basta scegliere $f_s > 2W$

2) Data f_s ⟶ DEVO IMPORRE che $W \le f_s/2 = f_N$

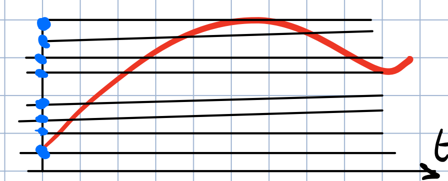
↳ filtro PASSA-BASSO : $f_T = \frac{f_s}{2} = f_N$: filtro ANTI-ALIASING



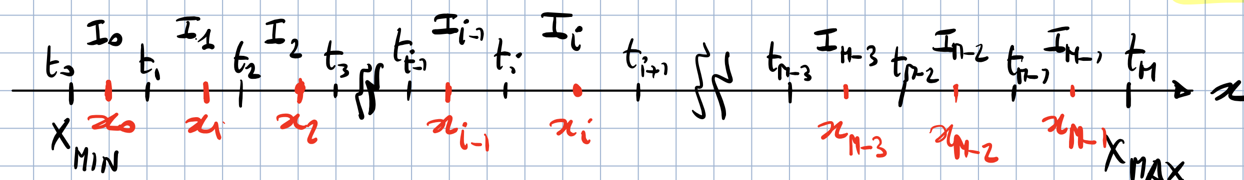
$$H_{AA}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le f_s/2 = f_N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$



QUANTIZZAZIONE



Dato $x(t)$: $X_{MIN} \le x(t) \le X_{MAX}$ → $\{X_{MIN}; X_{MAX}\}$: ESCURSIONE di $x(t)$



ESCURSIONE $\{X_{MIN}; X_{MAX}\}$ viene SUDDIVISA in M INTERVALLI :

- M INTERVALLI di QUANTIZZAZIONE : I_i, $i = 0, \dots, M-1$ delimitati da
- M+1 SOGLIE di QUANTIZZAZIONE : t_i, $i = 0, \dots, M$, dove $\begin{cases} t_0 = X_{MIN} \\ t_M = X_{MAX} \end{cases}$

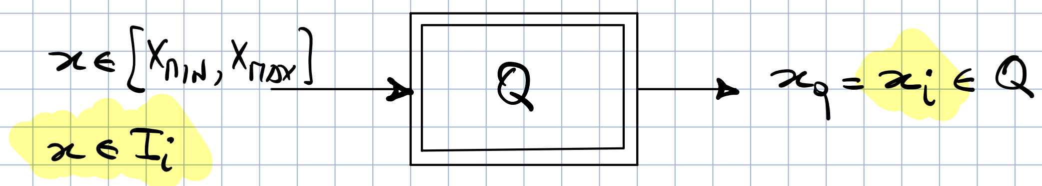
↳ In CIASCUN INTERVALLO I_i definisco un VALORE RAPPRESENTATIVO x_i :

x_i, $i = 0, \dots, M-1$, $x_i \in I_i \longrightarrow t_i \le x_i \le t_{i+1}$

↳ detti LIVELLI di QUANTIZZAZIONE

QUANTIZZAZIONE : SOSTITUZIONE (APPROSSIMAZIONE) dell'AMPIEZZA x con il suo VALORE RAPPRESENTATIVO x_i, dove $x \in I_i$

Dato $x \in [X_{MIN}, X_{MAX}]$, $x \in I_i$ $\xrightarrow{\text{QUANTIZZAZIONE}}$ $x \to x_q = x_i$,
$(t_i \le x \le t_{i+1})$ $\qquad x_i \in Q = \{x_0, x_1, \dots x_{M-1}\}$



QUANTIZZAZIONE UNIFORME :

- L'ESCURSIONE $[X_{MIN}, X_{MAX}]$ viene SUDDIVISA in M INTERVALLI di UGUALE AMPIEZZA : Δ

$$\Delta = \frac{X_{MAX} - X_{MIN}}{M} \quad : \text{PASSO di QUANTIZZAZIONE}$$

- Il VALORE RAPPRESENTATIVO x_i è il VALOR MEDIO in I_i :

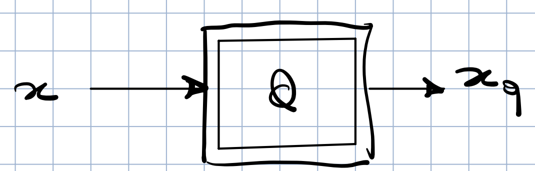
$$x_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2} = t_i + \frac{\Delta}{2}$$

- M in GENERE è UNA POTENZA di 2 : $\quad M = 2^n \quad$ QUANTIZZAZIONE a n BIT/CAMPIONE

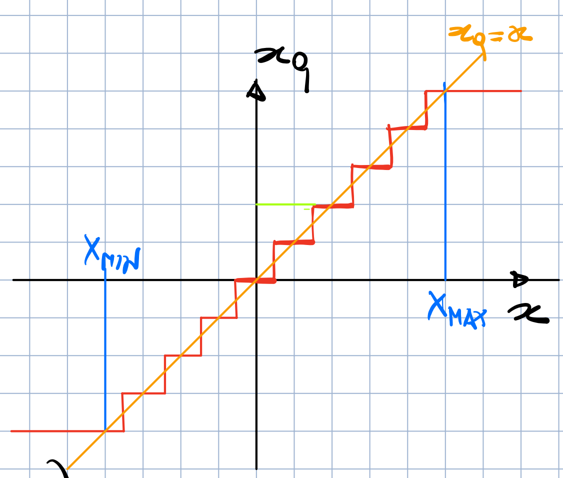
mi servono esattamente n BIT per RAPPRESENTARE $2^n = M$ INTERVALLI

n : RISOLUZIONE della QUANTIZZAZIONE

DESCRIZIONE della QUANTIZZAZIONE con la CARATTERISTICA INGRESSO/USCITA



$$x \in I_i \xrightarrow{Q} x_q = Q(x) = x_i$$



- la QUANTIZZAZIONE è IRREVERSIBILE $(x \to x_q)$
- $x \to x_q \qquad x_q - x = e_q$: ERRORE di QUANTIZZAZIONE

CARATTERISTICHE di e_q :

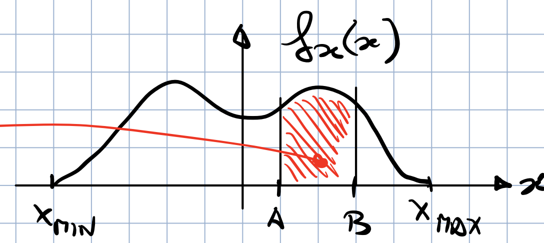
★ e_q è LIMITATO tra $\pm \Delta/2$: $\quad -\frac{\Delta}{2} \leq e_q < \frac{\Delta}{2} \quad ; \quad \Delta = \frac{X_{MAX} - X_{MIN}}{M} = \frac{X_{PP}}{2^n}$

★ e_q è una VARIABILE CASUALE UNIFORME

DENSITÀ di PROBABILITÀ di una V.C. x : $f_x(a)$

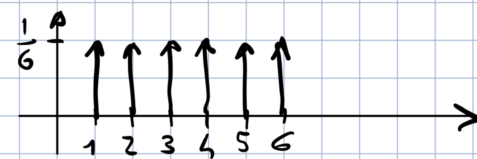
funzione dei valori assumibili da x che DEFINISCE le PROBABILITÀ di assumere determinati valori:

$$\text{PROB}[A \leq x < B] = \int_A^B f_x(a)\,da =$$



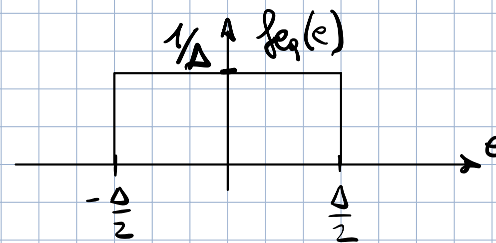
PROPRIETÀ : $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(a)\,da = 1$

es. DADO:



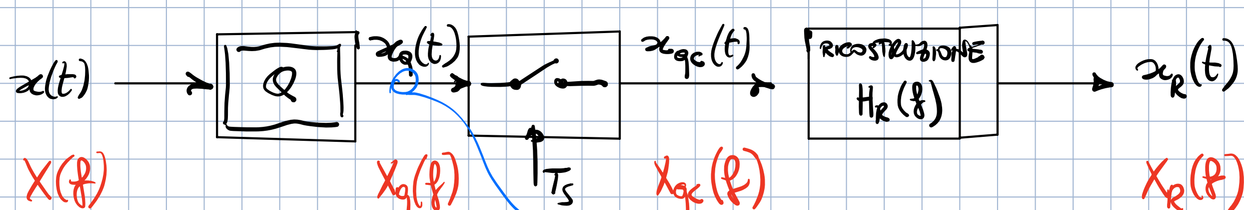
DENSITÀ di PROBABILITÀ di e_q :

$$f_{e_q}(e) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{per } -\frac{\Delta}{2} \leq e < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



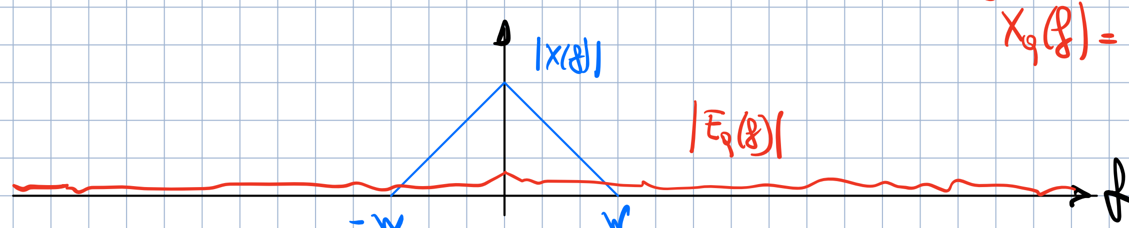
EFFETTO della QUANTIZZAZIONE sul SEGNALE

Immaginiamo di INVERTIRE CAMPIONAMENTO e QUANTIZZAZIONE:



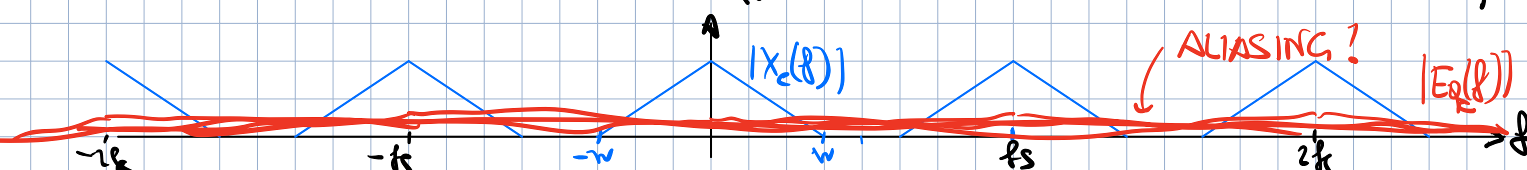
★ A VALLE del QUANTIZZATORE: $x_q(t) = x(t) + e_q(t)$

$X_q(f) = X(f) + E_q(f)$

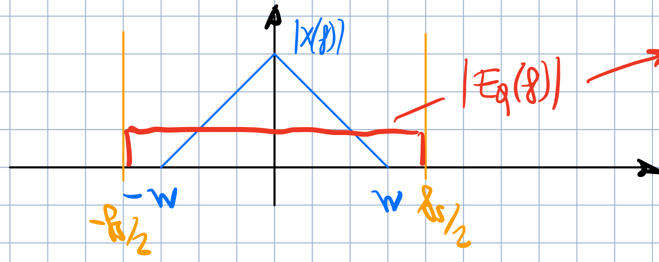


- $e_q(t)$ ha POTENZA $\ll$ di $x(t)$
- SPETTRO di $e_q(t)$ ($E_q(f)$) è MOLTO PIÙ ESTESO di $X(f)$

★ A VALLE del CAMPIONATORE: $X_{qc}(f)$ è la REPLICA PERIODICA di $X_q(f)$



☆ In USCITA dal FILTRO di RICOSTRUZIONE: $x_R(t)$ / $X_R(f)$

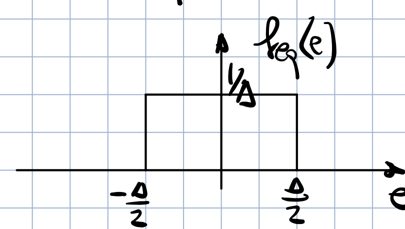


RUMORE di QUANTIZZAZIONE: → RUMORE BIANCO

POTENZA del RUMORE di QUANTIZZAZIONE

POTENZA = VALOR MEDIO di $e_q^2(t)$ → VALOR MEDIO della V.C.: e_q^2

$$P_Q = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} f_{eq}(e)\cdot e^2\, de = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} e^2 de = \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 de =$$



$$\boxed{P_Q = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{e^3}{3}\right]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\Delta^3}{24} + \frac{\Delta^3}{24}\right] = \frac{\Delta^2}{12}}$$

Noi siamo interessati al: RAPPORTO SEGNALE/RUMORE

(SIGNAL/NOISE RATIO - SNR): $SNR = \frac{P_{SIGNAL}}{P_{NOISE}}$

Per la potenza di segnale posso definire:

☆ POTENZA di PICCO:

↳ per SEGNALI BIPOLARI: $V_{MIN} = -A$; $V_{MAX} = +A$ → ESCURSIONE: $V_{PP} = 2A$

↳ la POTENZA di PICCO $P_{S,PEAK} = (\pm A)^2 = A^2 = \left(\frac{V_{PP}}{2}\right)^2 = \frac{V_{PP}^2}{4}$

☆ POTENZA MEDIA:

$$P_{S,MEDIA} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^2(t)\,dt = f_{PEAK}\cdot P_{S,PEAK} \; ;$$

FATTORE di PICCO
$0 \leq f_{PEAK} \leq 1$

RAPPORTO SEGNALE/RUMORE di QUANTIZZAZIONE:

$$SNR_Q = \frac{P_S}{P_Q}$$

★ SNR_Q di PICCO: $\rightarrow SNR_{Q,PEAK} = \frac{P_{S,P}}{P_Q} = \frac{V_{PP}^2/4}{\Delta^2/12} = (V_{PP} = M \cdot \Delta = 2^n \cdot \Delta)$

$$\boxed{SNR_{Q,Picco} = \frac{(2^n \cdot \cancel{\Delta})^2 / \cancel{4}}{\cancel{\Delta^2} / \cancel{12}\,3} = 3 \cdot 2^{2n}}$$

$\rightarrow$ DIPENDE SOLO da n (n: RISOLUZIONE)

★ SNR_Q MEDIO:

$$\boxed{SNR_{Q,MEDIO} = \frac{P_{S,M}}{P_Q} = \frac{f_{PEAK} \cdot P_{PEAK}}{P_Q} = f_{PEAK} \cdot 3 \cdot 2^{2n}}$$

SNR in FORMA LOGARITMICA

DECIBEL: RAPPORTO tra AMPIEZZE o POTENZE

Per rapporti tra AMPIEZZE: $\left.\frac{A_1}{A_2}\right|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{A_1}{A_2}$

Per rapporti tra POTENZE: $\left.\frac{P_1}{P_2}\right|_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$

Esprimiamo SNR_Q in dB:

$$SNR_{Q,Picco}\Big|_{dB} = 10 \log_{10}(SNR_{Q,P}) = 10 \log_{10}(3 \cdot 2^{2n}) = 10 \left[\log_{10} 3 + 2n \log_{10} 2\right] =$$
$$= 4{,}77 + 6{,}02\, n$$

$$SNR_{Q,MEDIO}\Big|_{dB} = 10 \log_{10}(f_{PEAK} \cdot 3 \cdot 2^{2n}) = 10 \left[\log_{10} f_P + \log_{10} 3 + 2n \log_{10} 2\right] =$$
$$= f_{PEAK}\Big|_{dB} + 4{,}77 + 6{,}02\, n$$

ESEMPIO:

Si vuole quantizzare un segnale con $f_{PEAK} = 0{,}25$ con $SNR_{Q,M} > 2000$

$$SNR_{Q,M} = f_{PEAK} \cdot 3 \cdot 2^{2n} > 2000$$

$$2^{2n} > \frac{2000}{3 \cdot f_{PEAK}} = \frac{2000}{0{,}75} \longrightarrow 2^{n} > \sqrt{\frac{2000}{0{,}75}} \simeq 51{,}64$$

$$\log_2(2^n) = n > \log_2 51{,}64 \simeq 5{,}7 \longrightarrow n = 6 \text{ bit} \quad (M = 2^6 = 64)$$

In dB :

$$SNR_{Q,M}\Big|_{dB} = 10\log_{10}(SNR) = 10\log_{10}(2000) = 33 \text{ dB}$$

$$f_{PEAK}\Big|_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{1}{4}\right) = -6 \text{ dB}$$

$$SNR_{Q,M}\Big|_{dB} = f_{PEAK}\Big|_{dB} + 4{,}77 + 6{,}02\,n = -6 + 4{,}77 + 6{,}02\,n > 33$$

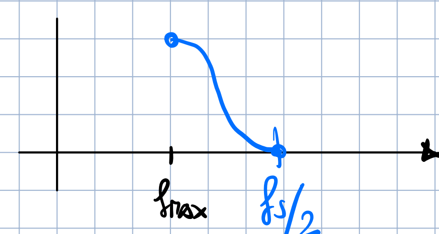
$$\longrightarrow n > \frac{33 + 6 - 4{,}77}{6{,}02} \simeq \frac{34{,}23}{6{,}02} \approx 5{,}7 \longrightarrow n = 6 \text{ bit}.$$

ESERCIZIO :

Dato : $s(t) = A\cos(2\pi f_i t)$ dove f_i varia LENTAMENTE tra 0 e 20 kHz, come convertire $s(t)$ in DIGITALE garantendo $SNR_{Q,MEDIO} > 90$ dB ?

- CAMPIONAMENTO : $f_s > 2 f_{MAX} = 2 \cdot 20 \text{ kHz} = 40 \text{ kHz} \rightarrow f_s \geq 40 \text{ kHz}$

- $f_{PEAK} = \dfrac{P_M}{P_{PEAK}}$



$$P_{PEAK} = (\pm A)^2 = A^2$$

$$P_{MEDIO} = (\text{su } 1 \text{ PERIODO}) = \frac{1}{T}\int_T s^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T A^2\cos^2(2\pi f_i t)\,dt =$$

$$= \frac{A^2}{T}\int_0^T \cos^2(2\pi f_i t)\,dt = \frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\left[1 + \cos(4\pi f_i t)\right]dt =$$

$$= \frac{A^2}{T}\left[\int_0^T \frac{1}{2}\,dt + \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2}\cos(4\pi f_i t)\,dt}_{0}\right] = \frac{A^2}{\cancel{T}}\left[\frac{\cancel{T}}{2} + 0\right] = \frac{A^2}{2}$$

$$f_{PICCO} = \frac{P_{MEDIA}}{P_{PEAK}} = \frac{1}{2} \longrightarrow f_{PICCO}\Big|_{dB} = 10\log_{10}\frac{1}{2} = -3 \text{ dB}$$

$\rightarrow \; SNR_{Q,M}\big|_{dB} = f_P\big|_{dB} + 4{,}77 + 6{,}02\,n > 90\ dB$

$= -3 + 4{,}77 + 6{,}02\,n > 90 \rightarrow n > \dfrac{90+3-4{,}77}{6{,}02} \simeq 14{,}6$

$\longrightarrow \boxed{n = 15\ bit}$

★ Δ ? , P_Q ? $\longrightarrow P_Q = \dfrac{\Delta^2}{12}$

$$\Delta = \frac{V_{pp}}{M} = \frac{A-(-A)}{2^n} = \frac{2A}{2^{15}} = \frac{A}{2^{14}} = 2^{-14}A$$

$$P_Q = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-28}A^2}{12} \simeq 3{,}1\cdot 10^{-10}\,A$$

★ Bit-rate ?

$$r_B = f_s \cdot n = 40\ kHz \cdot 15 = 600\ kbit/s$$

TRASFORMATE per SEGNALI DIGITALI

TRASFORMATA di FOURIER per SEGNALI TEMPO-DISCRETI

Dato $s(t)$ TEMPO-CONTINUO $\longrightarrow$ $s_c(t)$ CAMPIONATO (TEMPO-DISCRETO)

$$s_c(t) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_c(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$

PERIODICO, "PERIODO": $\frac{1}{T_s} = f_s$

Riusciamo ad esprimere $S_c(f)$ in FUNZIONE solo dei CAMPIONI $s(nT_s)$?

$$s_c(t) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\,\delta(t-nT_s)$$

Calcolo lo SPETTRO di $s_c(t)$ partendo da:

$$s_c(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_c(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_c(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\,\delta(t-nT_s)\,e^{-j2\pi ft}\,dt =$$

$$\overset{(\times\ \text{linearità})}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\,e^{-j2\pi ft}\,dt}_{e^{-j2\pi f nT_s}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\,e^{-j2\pi f nT_s}$$

$$s(nT_s) = s_c(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\,e^{-j2\pi f nT_s}$$