SEGNALE : VETTORE di INFORMAZIONE

Nello specifico: SEGNALE $\equiv$ FUNZIONE

SEGNALE : GRANDEZZA FISICA, FUNZIONE di un'altra GRANDEZZA (TEMPO, SPAZIO)

$\hookrightarrow$ variabile INDIPENDENTE

SEGNALE : $y = f(x)$, $f : A \rightarrow B$

$x \in A$: il DOMINIO di f

$y \in B$: il CO-DOMINIO di f

ES: SUONO : Pressione = f(tempo) $A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

IMMAGINE : Luminosità/Colore = f(Spazio 2D) : $A \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

CLASSIFICAZIONE di SEGNALI

Dato un segnale $y = f(x)$ con $f : A \rightarrow B$, $\begin{cases} x \in A & \text{DOMINIO di } f \\ y \in B & \text{CODOMINIO di } f \end{cases}$

DIMENSIONALITÀ di un SEGNALE

- in base alla DIMENSIONE del DOMINIO A :

un segnale è MONODIMENSIONALE (1-D) sse A è 1D (es: $A \equiv \mathbb{R}$)

" " " N-DIMENSIONALE (n-D) sse A è n-D (es: $A \equiv \mathbb{R}^n$)

es: SUONO : $p = f(t)$; $t \in \mathbb{R}$ MONODIMENSIONALE

IMMAGINE : $l = f(x, y)$ $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$: BIDIMENS.

VIDEO : $c = f(x, y, t)$ $\langle x, y, t \rangle \in \mathbb{R}^3$ 3D

- in base alla dimensione del CODOMINIO B :

un segnale è SCALARE sse il CODOMINIO B è 1D (es: $B \subseteq \mathbb{R}$)

" " è VETTORIALE sse " B è n-D , $n > 1$ (es: $B \subseteq \mathbb{R}^n$)

SUONO : $p = f(t)$; $p \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ SCALARE

ACCELERAZIONE : $\vec{a} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle = f(t)$ $\longrightarrow$ VETTORIALE

CONTINUITÀ di un SEGNALE

CONTINUITÀ del DOMINIO A :

Un segnale $y = f(x)$, $x \in A$ è CONTINUO sse A è insieme CONTINUO (es $A \equiv \mathbb{R}$)

un segnale $y = f(x)$, $x \in A$ è DISCRETO sse A è ins. DISCRETO (es: $A \equiv \mathbb{Z}$)

es:

SUONO : $p = f(t)$; $t \in \mathbb{R} \rightarrow$ CONTINUO

TEMP. MIN. GIORNALIERA: $T_{MIN} = f(nT)$ $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ T = 24h \end{cases}$ $= f(n) \rightarrow$ DISCRETO

CONTINUITÀ del CODOMINIO B:

un segnale $y = f(x)$ è ad AMPIEZZE CONTINUE sse B è CONTINUO (es: $B \subseteq \mathbb{R}$)

" " $y = f(x)$ è ad AMPIEZZE DISCRETE sse B è DISCRETO (es: $B \subseteq \mathbb{Z}$)

ES: SUONO: $p = f(t)$ $p, t \in \mathbb{R}$ ad AMPIEZZE CONTINUE

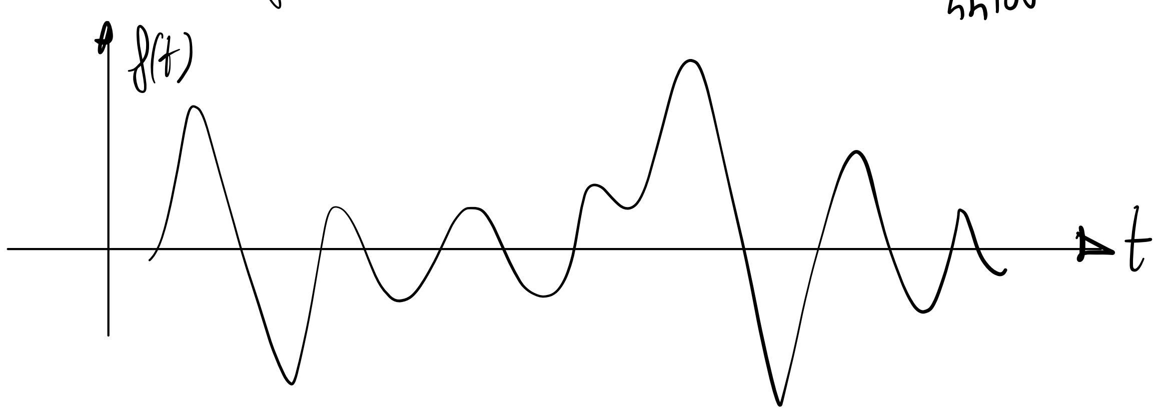
SEGNALE LOGICO: $y = f(t)$ $t \in \mathbb{R}$, $y \in B = \{0, 1\}$ ad AMP. DISCRETE

$y=f(x)$		A (DOMINIO): CONTINO	A (DOMINIO): DISCRETO
B (CODOMINIO)	CONTINUO	segnale ANALOGICO	segnale CAMPIONATO
	DISCRETO	segnale QUANTIZZATO	segnale DIGITALE

Esempio: segnale CD AUDIO

Codominio $B = \{-32768 ; +32767\}$ (16 bit)

Dominio A : $y = s(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$; $T = \frac{1}{44100}$ s



GRADO di CONOSCENZA di un SEGNALE

$$y(t) = \cos(10\pi t) + 2 \quad , \; t \in \mathbb{R}$$ segnale DETERMINISTICO

$y(t) \Rightarrow y(t, r) \longrightarrow$ segnale NON DETERMINISTICO,

r: REALIZZAZIONE CASUALE, ALEATORIO

OPERAZIONI sui SEGNALI (TRASFORMAZIONI)

SEGNALI CONTINUI

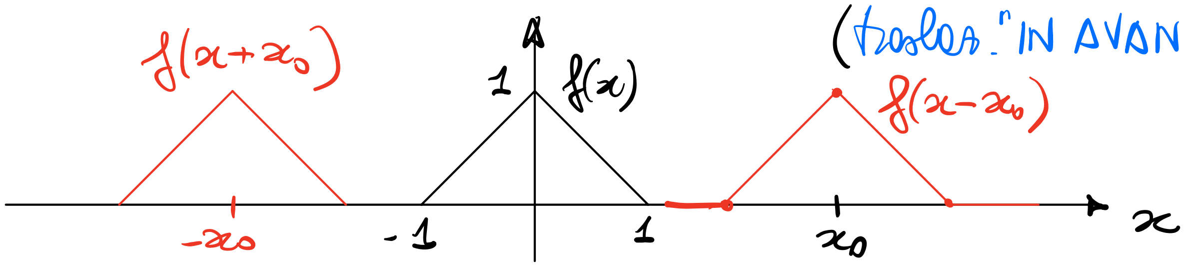
Def: $y = f(x)$, $x \in A$, A CONTINUO (es: $A \subseteq \mathbb{R}$)

TRASLAZIONE:

Dato un segnale $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R} \longrightarrow y' = f(x - x_0)$

TRASLAZIONE di y della QUANTITÀ x_0

(traslaz. "IN AVANTI")



$y = f(x) \longrightarrow y'' = f(x + x_0)$ TRASLAZ. di y di $(-x_0)$ (traslazione ALL'INDIETRO)

Se $y = f(t) \longrightarrow y' = f(t - t_0)$ RITARDO di t_0

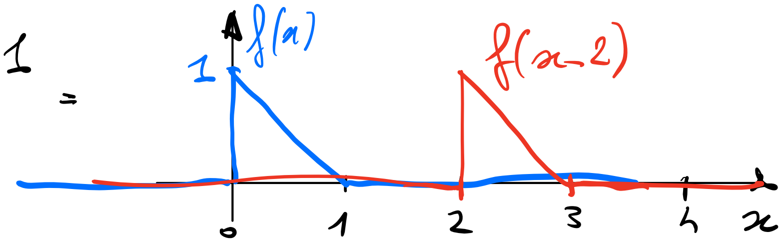
$y'' = f(t + t_0)$ ANTICIPO di t_0

ESEMPIO:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

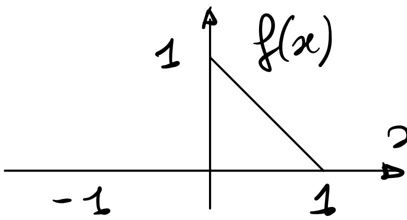
Determinare:

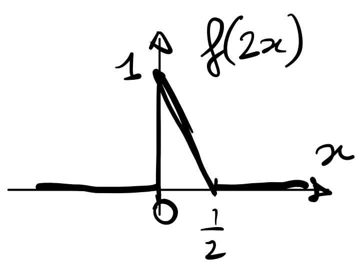
$$y' = f(x-2) = \begin{cases} 1-(x-2) & 0 \le x-2 \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \begin{cases} 3-x & 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

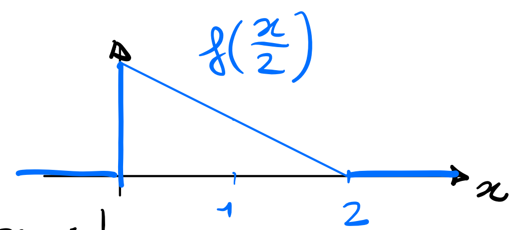


SCALATURA della VAR. INDIPENDENTE

Dato: $y = f(x),\ x \in \mathbb{R} \longrightarrow y' = f(ax)$ FATTORE: a







$0 \le x \le \frac{1}{2}$

$$y = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f(2x) = \begin{cases} 1-2x & 0 \le 2x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$x \to 2x$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 1-\frac{x}{2} & 0 \le \frac{x}{2} \le 1 \to 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$|a| > 1$ "COMPRESSIONE" di fattore a

$|a| < 1$ "ESPANSIONE" di fattore a

$a < 0$ "RIBALTAMENTO" sulle ASCISSE

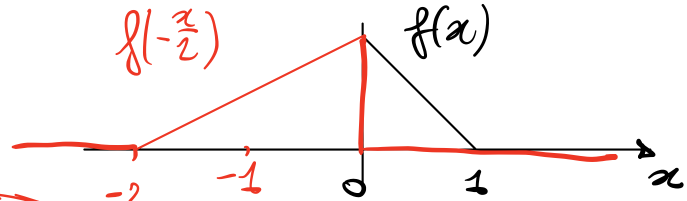
Es: $y = f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$y' = f\left(-\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 1+\frac{x}{2} & 0 \le -\frac{x}{2} \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$0 \ge x \ge -2$

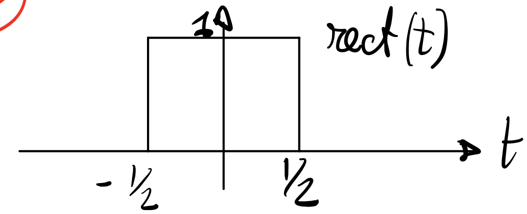
$-2 \le x \le 0$

$x \to -\frac{x}{2}$



ESEMPIO: determinare $y = f(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2} - 4\right)$

dove: $\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

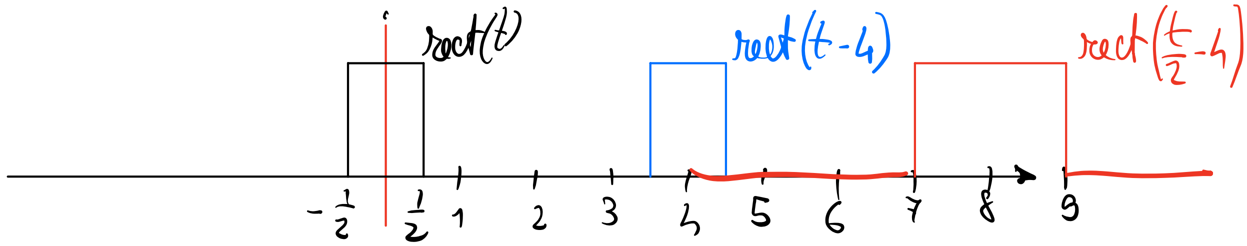


TRASLAZIONE: $t \to t-4$

SCALATURA: $t \to \frac{t}{2}$

$\cancel{t \to \frac{t}{2} \to \frac{t-4}{2} = \frac{t}{2} - 2}$

TRASLAZIONE: $\mathrm{rect}(t-4) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t-4 \le \frac{1}{2} \to \frac{7}{2} \le t \le \frac{9}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



SCALATURA $t \to \frac{t}{2} \to \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2} - 4\right) = \begin{cases} 1 & \frac{7}{2} \le \frac{t}{2} \le \frac{9}{2} \to 7 \le t \le 9 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$\mathrm{rect}\left(\frac{t-8}{2}\right)$

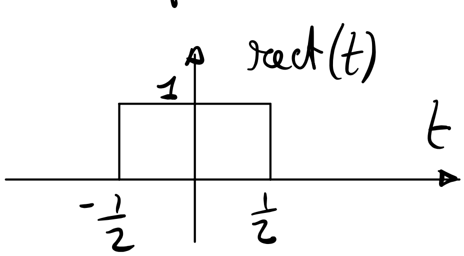
8 → CENTRO del rect( )

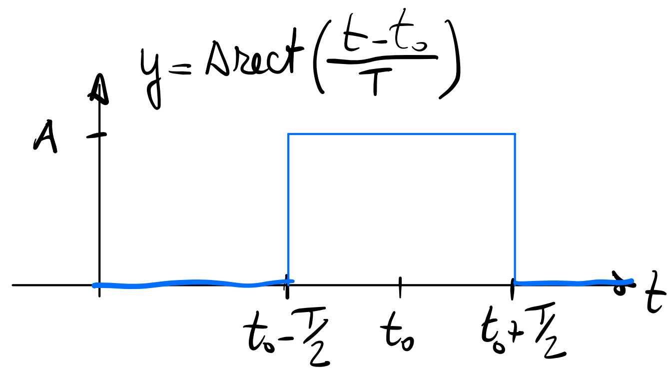
2 → AMPIEZZA

SEGNALI NOTEVOLI

FUNZIONE RETTANGOLO ("BOX", Impulso rettangolare)

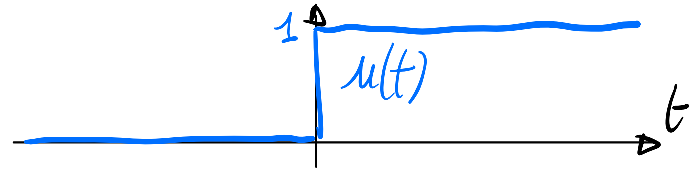
$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t \le +\frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



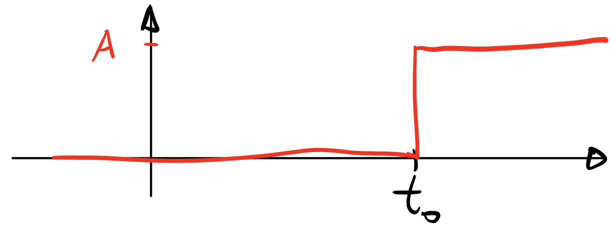


GRADINO (UNITARIO):

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$y(t) = A\, u(t - t_0)$$

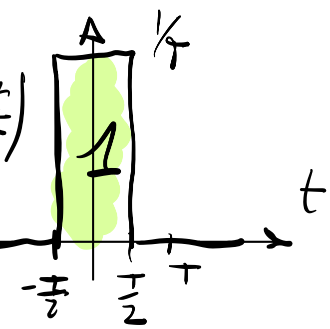


IMPULSO IDEALE o "DELTA di DIRAC"

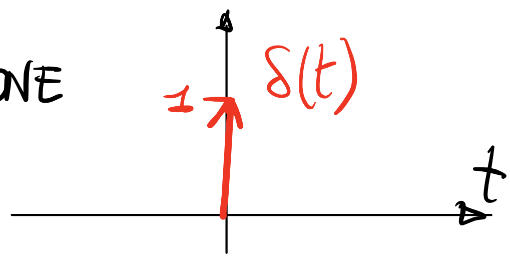
Idealizzazione del concetto di IMPULSO

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)}$$

$f(t) = \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

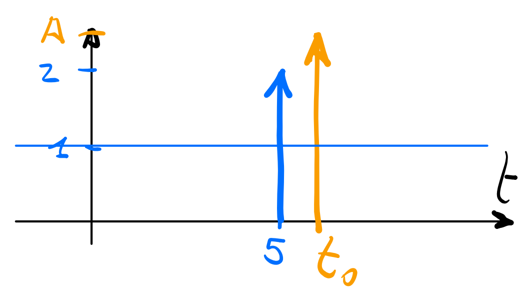


è una DISTRIBUZIONE



$$f(t) = A\, \delta(t - t_0)$$

$$s(t) = 1 + 2\,\delta(t-5)$$



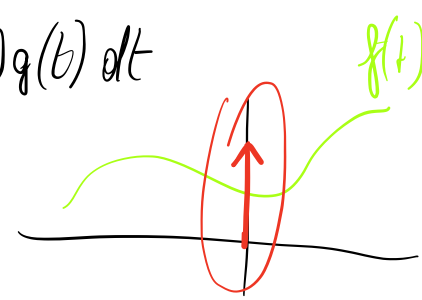
PROPRIETÀ

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$ AREA UNITARIA di $\delta(t)$

PRODOTTO SCALARE tra FUNZIONI : $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(t)\, dt$

$$\langle f(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t)\, dt = f(0)$$

PROPRIETÀ del CAMPIONAMENTO di $\delta(t)$

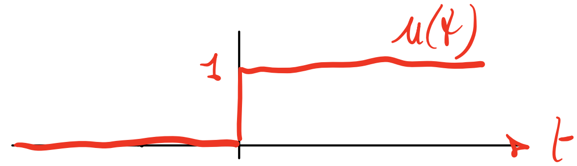


In generale: $\langle f(t), \delta(t-t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0)\, dt = f(t_0)$

PROPRIETÀ di $\delta(t)$:

- AREA UNITARIA: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$
- CAMPIONAMENTO: $\langle f(t), \delta(t-t_0)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$
- PRODOTTO: $f(t)\cdot\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$
- PARITÀ: $\delta(t) = \delta(-t)$
- INTEGRAZIONE: $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases} = u(t)$ GRADINO UNITARIO

$u(t)$: la PRIMITIVA di $\delta(t)$.



SEGNALI PERIODICI

$s(t)$ è PERIODICO sse $s(t) = s(t+T),\ \forall t\in\mathbb{R} \rightarrow s(t) = s(t+kT),\ \forall k\in\mathbb{Z}, \forall t\in\mathbb{R}$

T: il PERIODO di $s(t)$ $[s]$

$\frac{1}{T}$: la FREQUENZA di $s(t)$ $[Hz = s^{-1}]$

ES: $f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$; $\sin(2\pi f_0 t)$ $\rightarrow$ PERIODO: $T_0 = 1/f_0$; FREQUENZA: f_0

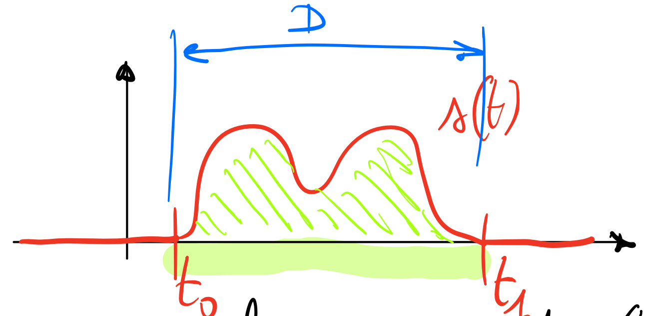
FASORE: $s(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$

ATTRIBUTI di SEGNALI

DURATA di un segnale

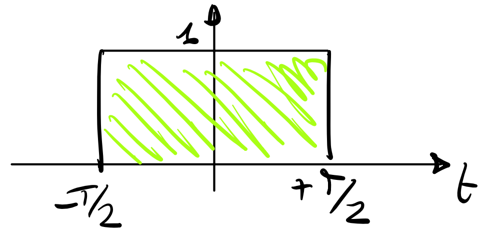
DURATA di $s(t)$: $D = t_1 - t_0$

↳ l'ESTENSIONE del MINIMO INTERVALLO che CONTIENE il SUPPORTO di $s(t)$



AREA di $s(t)$: AREA SOTTESA da $s(t)$

$$\text{AREA} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, dt$$



Esempio : Area di $s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\text{Area}: \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt = \int_{-T/2}^{+T/2} 1 \cdot dt = T$$

VALOR MEDIO di $s(t)$

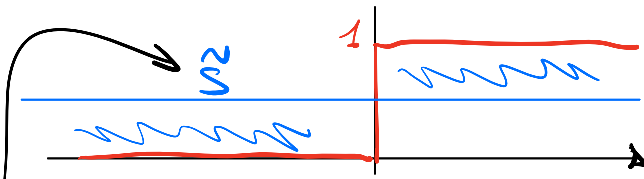
Il valore $\tilde{s}$ tale che $s'(t) = \tilde{s}$ ha la STESSA AREA di $s(t)$

$$\tilde{s} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)\, dt$$

Es. Valor medio del GRADINO $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\tilde{s} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{+T} 1 \cdot dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\cancel{2T}} \cdot \cancel{T} = \frac{1}{2} = \tilde{s}$$

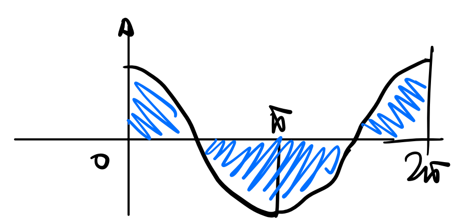


Se $s(t)$ è PERIODICO $\longrightarrow$ VALOR MEDIO è CALCOLABILE su un SOLO PERIODO :

Es : $s(t) = \cos(t)$

$$\tilde{s} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} s(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \cos(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \Big[\sin(t)\Big]_{0}^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\cancel{\sin(2\pi)} - \cancel{\sin(0)} \right] = 0$$



ENERGIA e POTENZA di un segnale

POTENZA ISTANTANEA di $s(t)$:

$$P(t) = s(t) \cdot \overline{s(t)} = |s(t)|^2$$

se $s(t) \in \mathbb{R}$: $\longrightarrow$ $P(t) = s^2(t)$

ENERGIA di $s(t)$:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt \quad ; \quad \text{se } s(t) \in \mathbb{R} \rightarrow E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt$$

POTENZA MEDIA di $s(t)$:

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} P(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt = \left(\begin{matrix}\text{se}\\ s(t)\in\mathbb{R}\end{matrix}\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s^2(t)\,dt$$

Es: Potenza MEDIA di $s(t) = \cos(t)$:

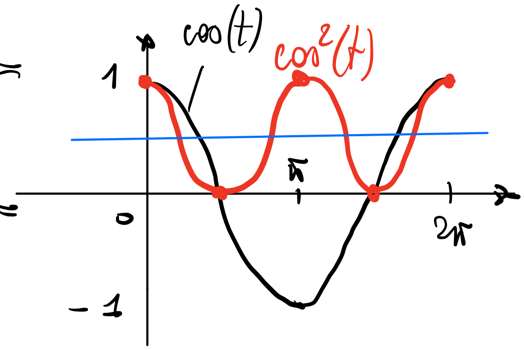
$\cos(t)$ è PERIODICO $(T = 2\pi)$ $\qquad P(t) = \cos^2(t)$

$$\rightarrow P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \cos(2t)\,dt \right] =$$

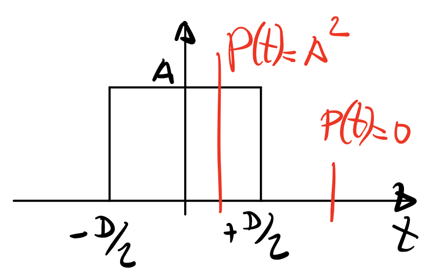
$$= \frac{1}{4\pi} \left[2\pi + \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \left(\cancel{\frac{\sin 4\pi - \sin(0)}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}$$



ESEMPIO: Calcolo ENERGIA e POT. MEDIA di $s(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right)$

Pot. ISTANTANEA: $P(t) = s^2(t) = A^2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right)$

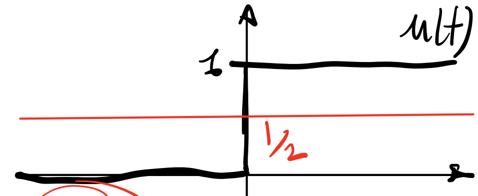


$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-D/2}^{+D/2} A^2\,dt = A^2 \cdot D \quad E_s$$

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s^2(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-D/2}^{+D/2} A^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot A^2 \cdot D = 0 \quad P_s$$

ENERGIA e POT. MEDIA di $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t)\,dt = \int_0^{+\infty} 1 \cdot dt = \infty \quad E_s$$



$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u^2(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\cancel{T}}\cdot\cancel{T} = \frac{1}{2} \quad P_s$$

$s(t)$ è un SEGNALE ENERGIA sse $0 \le E_s < \infty \longrightarrow P_s = 0$

$s(t)$ è un SEGNALE POTENZA sse $0 < P_s < \infty \longrightarrow E_s = \infty$

SEGNALI DISCRETI

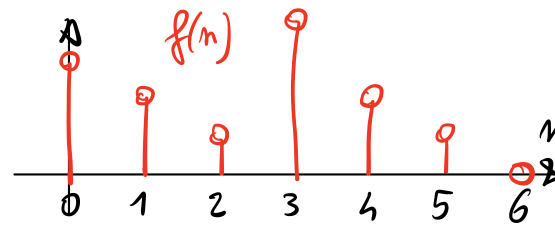
$y = f(x)$, $f: A \to B$, $\begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \longrightarrow$ se A è INSIEME DISCRETO

↳ y è SEGNALE DISCRETO

es: $A \equiv \mathbb{Z}$ (num. INTERI)

$$\boxed{\text{SEGNALE DISCRETO: } y = f(n),\ n \in \mathbb{Z}}$$

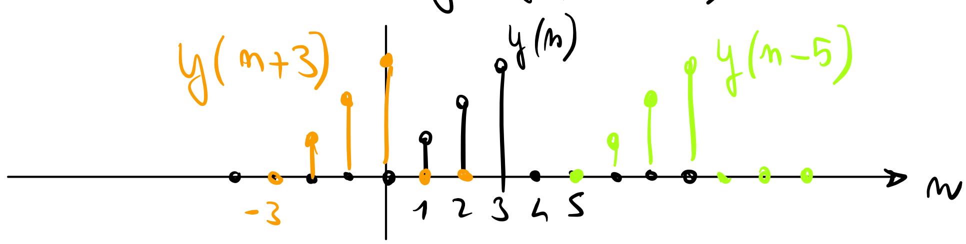
OPERAZIONI su SEGNALI DISCRETI :



TRASLAZIONE

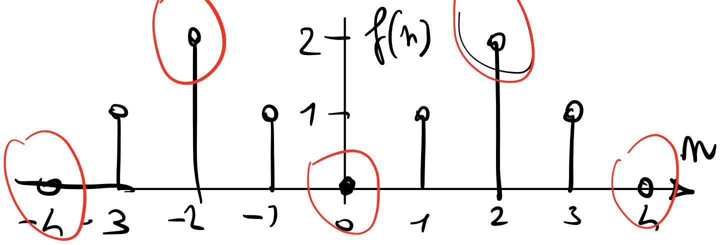
Dato $y = f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\longrightarrow y' = f(n - n_0)$ TRASLAZ. di n_0 (in AVANTI)

$\searrow y'' = f(n + n_0)$ " " $(-n_0)$ (all'INDIETRO)

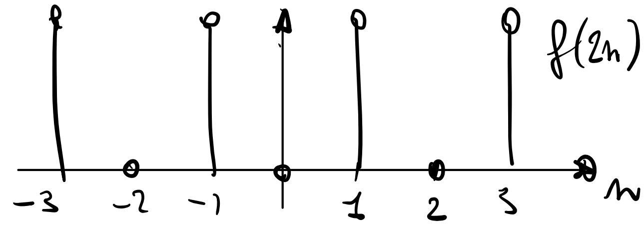


~~SCALATURA~~ → DECIMAZIONE / INTERPOLAZIONE

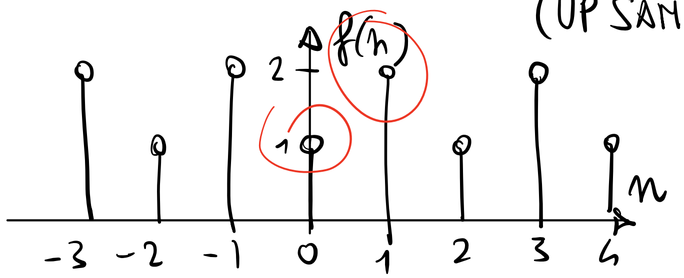
Dato $y = f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$: DECIMAZIONE (DOWNSAMPLING) $y' = f(an)$, $a \in \mathbb{Z}$, $|a| > 1$



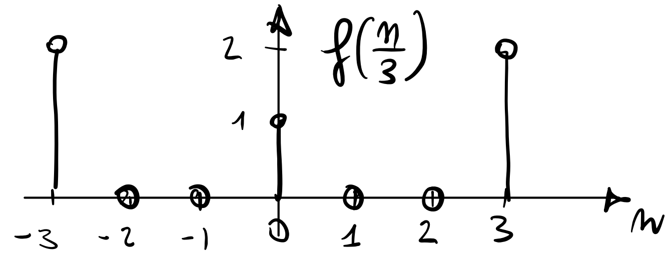
$a=2$



Dato $y=f(n)$, $n\in\mathbb{Z}$: INTERPOLAZIONE (UP SAMPLING) $y'=f\left(\frac{n}{a}\right)$, $a\in\mathbb{Z}$ $|a|>1$



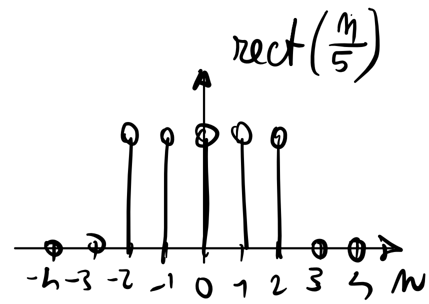
$a=3$



SEGNALI DISCRETI NOTEVOLI :

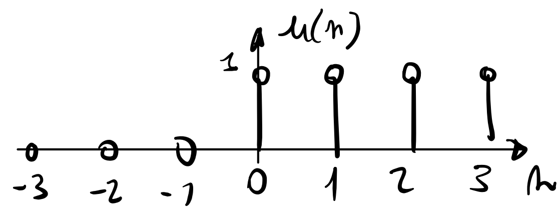
RETTANGOLO DISCRETO

$$f(n)=\mathrm{rect}\left(\frac{n}{D}\right)=\begin{cases}1 & -\frac{D}{2}\leq n\leq\frac{D}{2}\\ 0 & \text{altrove}\end{cases},\quad n\in\mathbb{Z}$$



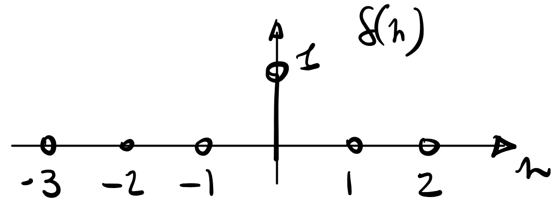
GRADINO UNITARIO DISCRETO

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases},\quad n\in\mathbb{Z}$$



IMPULSO DISCRETO

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}\quad n\in\mathbb{Z}$$



PROPRIETÀ di $\delta(n)$:

AREA UNITARIA : $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)=1$

CAMPIONAMENTO : [Prodotto scalare discreto : $\langle f(n),g(n)\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)g(n)$]

$$\langle f(n),\delta(n)\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\,\delta(n)=f(0)$$

$$\langle f(n), \delta(n-n_0)\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n)\,\delta(n-n_0) = f(n_0)$$

PRODOTTO : $f(n)\,\delta(n-n_0) = f(n_0)\,\delta(n-n_0)$

PARITÀ : $\delta(n) = \delta(-n)$

INTEGRAZIONE (DISCRETA) : $\sum_{-\infty}^{n} \delta(i) = \begin{cases} 0 & n<0 \\ 1 & n\geq 0 \end{cases} = u(n)$ GRADINO UNITARIO DISCRETO

SEGNALI PERIODICI DISCRETI

Se $s(n) = s(n+N)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\longrightarrow$ $s(n) = s(n+kN)$, $n,k,N \in \mathbb{Z}$

$\longrightarrow$ $s(n)$ è PERIODICO, PERIODO $= N \in \mathbb{Z}$

FREQUENZA $f = \frac{1}{N} \in \mathbb{Q}$ è RAZIONALE

ES: $s(k) = A\sin(2\pi f n)$ $\left[f=\frac{1}{16}\right] = A\sin\left(\frac{\pi}{8} n\right)$

$f \in \mathbb{Q}$ $\qquad T = \frac{1}{f} = 16 \in \mathbb{Z}$