.

Morfologia

Stefano Ferrari

Università degli Studi di Milano
stefano.ferrari@unimi.it

Tecniche di calcolo e sistemi operativi e informatica
anno accademico 2017–2018

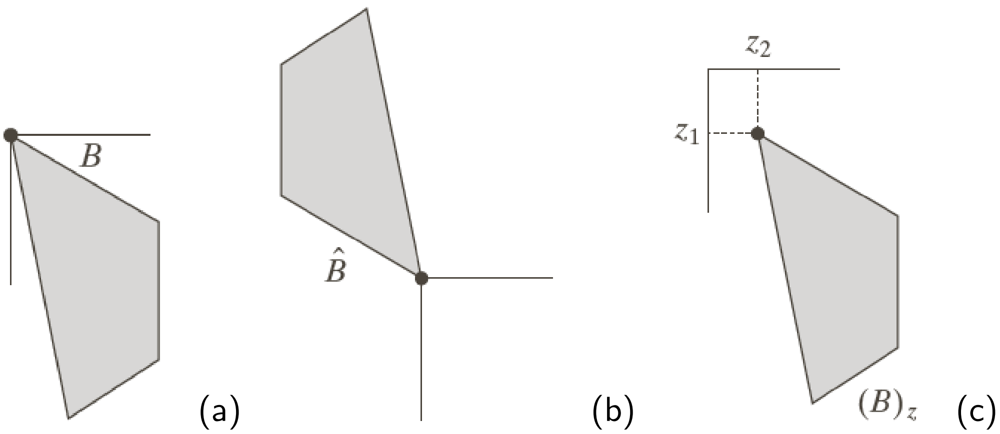
Elaborazioni morfologiche

- La *morfologia* di una immagine descrive le forme rappresentate nell'immagine stessa.
- A basso livello, gli oggetti rappresentati nell'immagine sono agglomerati di pixel che si distribuiscono nel piano dell'immagine con una legge che dipende dalle caratteristiche dell'oggetto rappresentato.
- Le elaborazioni basate sulla morfologia sfruttano la conoscenza a priori su tali caratteristiche.
- In particolare, utilizzano le caratteristiche locali dei pixel vicini.
- Le elaborazioni morfologiche possono essere formalizzate come operazioni insiemistiche su insiemi di punti del piano.
  - Per semplicità, si considerano punti di $\mathbb{Z}^2$, ma si possono generalizzare ad altri insiemi (e.g., $\mathbb{Z}^n$, o $\mathbb{R}^2$).

Elaborazioni morfologiche (2)

- Esse sono facilmente definite su immagini binarie, dove i concetti di appartenenza e complemento sono associabili al colore del pixel, ma possono essere estese anche a immagini a toni di grigio.
- Un'immagine binaria, f, può essere utilizzata per descrivere un insieme di punti di $\mathbb{Z}^2$, B:
  - se $f(x, y)$ è bianco, $(x, y) \in B$;
  - se $f(x, y)$ è nero, $(x, y) \notin B$.
  - $B = \{(x, y) \mid f(x, y) = 1\}$
- Nota: nei grafici esemplificativi, gli insiemi considerati sono di colore grigio, mentre lo sfondo è bianco.

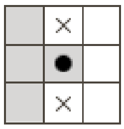
Definizioni



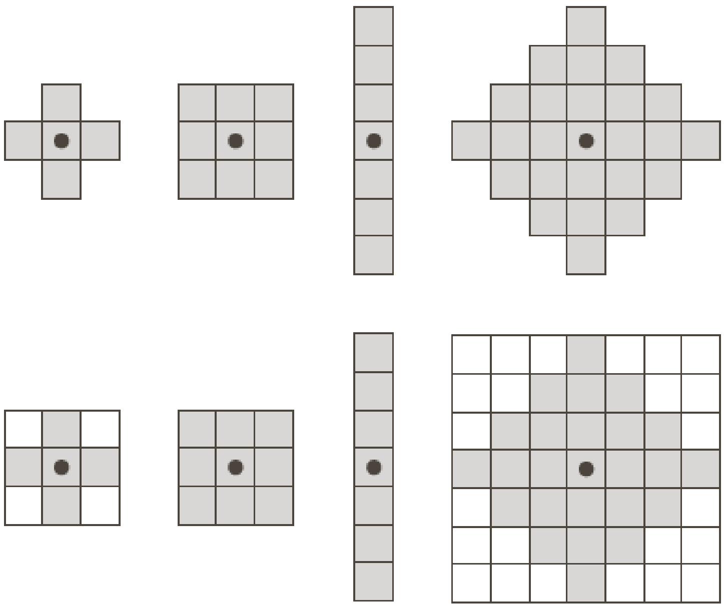
- Dato un insieme, B, e il punto *origine*, si possono definire gli operatori di *riflessione* e *traslazione*.
- La riflessione, $\hat{B}$, è definita come: $\hat{B} = \{-b \mid b \in B\}$.
- La traslazione di z, $(B)_z$, è definita come: $(B)_z = \{b + z \mid b \in B\}$

Elemento strutturante

- Le operazioni morfologiche sono generalmente definite rispetto ad un insieme, detto *elemento strutturante*.
- Gli elementi strutturanti per le immagini sono a loro volta delle matrici di pixel.
- Gli elementi strutturanti sono definiti rispetto ad una origine.
  - Tipicamente, è il baricentro.
- Per descrivere gli elementi strutturanti, si usa convenzionalmente:
  - cella piena: membro dell'elemento strutturante;
  - cella vuota: non membro dell'elemento strutturante;
  - crocetta: indifferenza.



Elemento strutturante (2)



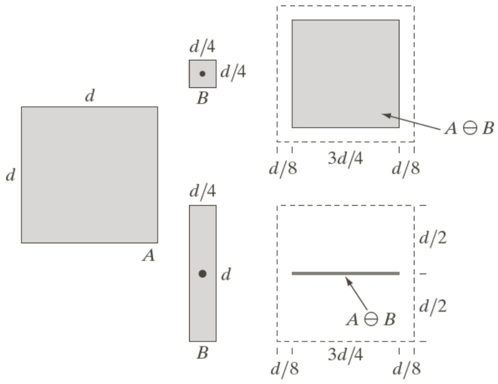
Erosione

Dati gli insiemi A e B, l'*erosione* di A attraverso B, $A \ominus B$, è definita come:

$$A \ominus B = \{z \,|\, (B)_z \subseteq A\}$$

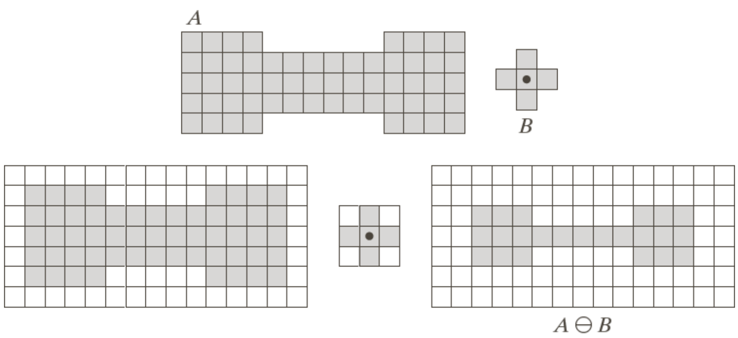
In modo equivalente, A eroso B può essere definito come:

$$A \ominus B = \{z \,|\, (B)_z \cap A^c = \emptyset\}$$

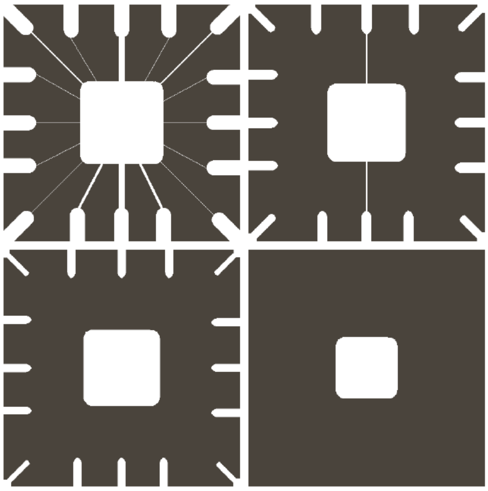


Erosione (2)

- Se A e B sono immagini, le operazioni morfologiche si calcolano traslando l'origine dell'elemento strutturante in ogni pixel dell'immagine A, valutando poi se la definizione dell'operazione è soddisfatta.
  - Può essere necessario applicare del padding.
- Nel caso dell'erosione:
  - si porta l'origine di B su un pixel $a \in A$;
  - se tutti gli elementi di B corrispondono ad un elemento di A, il pixel a appartiene ad $A \ominus B$.



Filtraggio morfologico



- L'operazione di erosione può essere utilizzata per operare un filtraggio basato sulla forma (*filtraggio morfologico*).
- In alto a destra è riprodotta una immagine binaria 486×486; nelle altre immagini il risultato dell'erosione con elementi strutturanti quadrati di dimensione 11×11, 15×15 e 45×45.

- L'erosione elimina i dettagli troppo piccoli rispetto all'elemento strutturante.

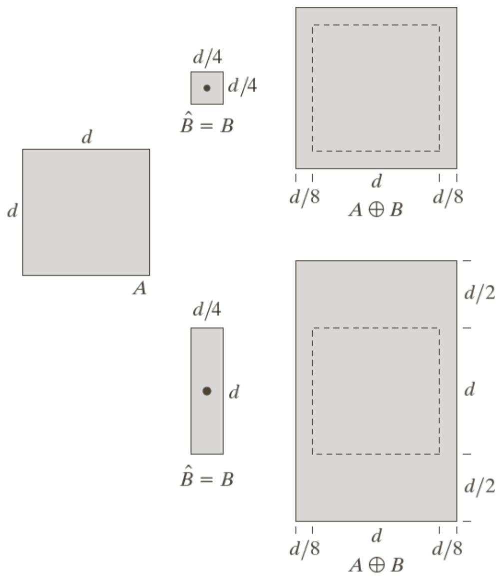
Dilatazione

Dati gli insiemi A e B, la *dilatazione* di A attraverso B, $A \oplus B$, è definita come:

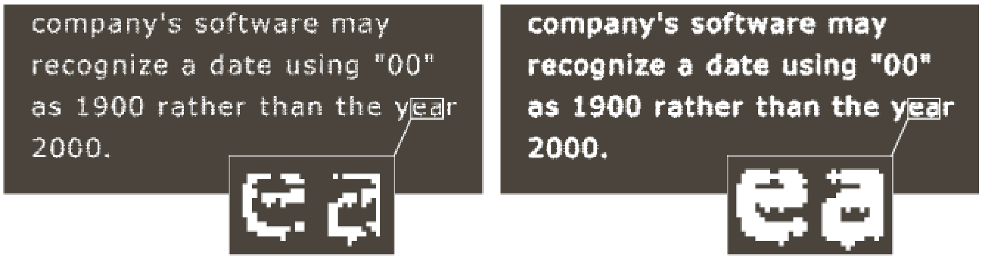
$$A \oplus B = \{z \,|\, (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

In modo equivalente, A eroso B può essere definito come:

$$A \oplus B = \{z \,|\, ((\hat{B})_z \cap A) \subseteq A\}$$



Dilatazione (esempio)



0	1	0
1	1	1
0	1	0

- L'operazione di dilatazione ha effetti analoghi al filtraggio passabasso: i dettagli vengono assorbiti.
- Nel caso in esame, la dilatazione irrobustisce i caratteri, riempiendo gli spazi tra i frammenti.

Dualità

- L'erosione e la dilatazione sono operazioni duali rispetto al complementare e alla riflessione:

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

e

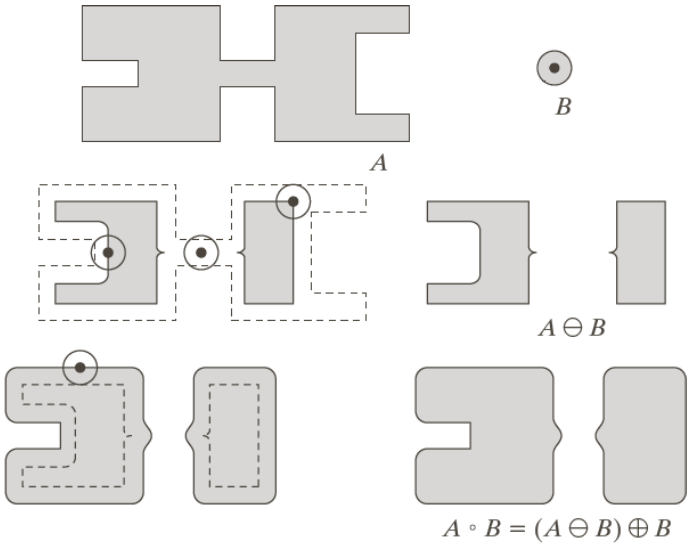
$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$$

- Se l'elemento strutturante è simmetrico ($\hat{B} = B$), si può ottenere l'erosione di A dilatando lo sfondo, A^C, con lo stesso elemento strutturante, e complementando il risultato (e viceversa per la dilatazione).

Apertura

L'*apertura* di un insieme A attraverso B, $A \circ B$, è definita come:

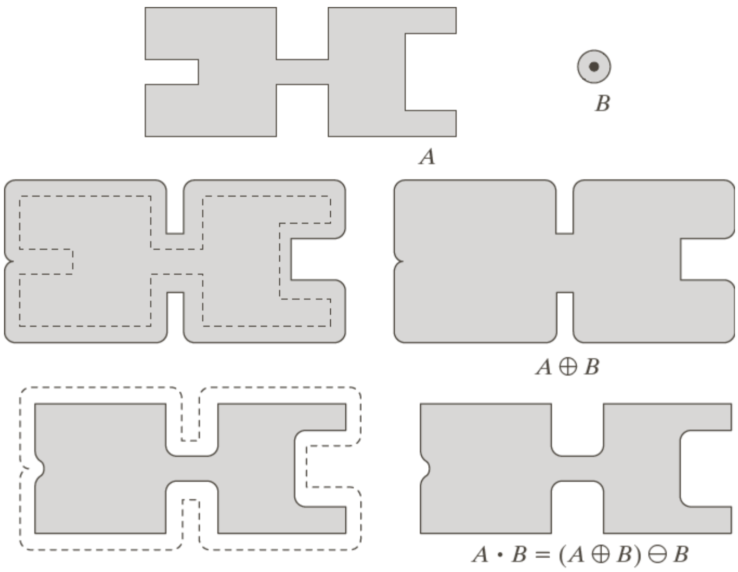
$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$



Chiusura

La *chiusura* di un insieme A attraverso B, $A \circ B$, è definita come:

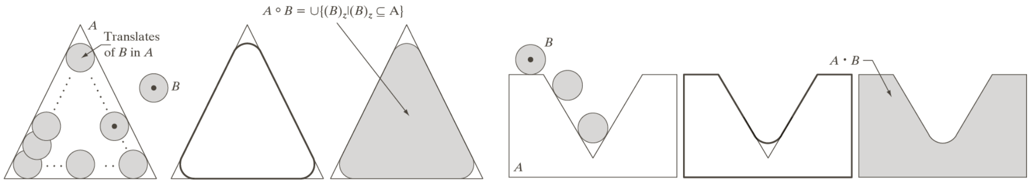
$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$



.

Apertura e chiusura

- Apertura e chiusura eliminano i dettagli:
  - l'apertura elimina le protuberanze e gli istmi troppo sottili;
  - la chiusura riempie le insenature e i buchi troppo piccoli.
- Hanno una semplice interpretazione geometrica:
  - l'apertura risulta come i punti di A coperti dalla traslazione di B lungo il bordo interno di A;
  - la chiusura risulta aggiungendo ad A i punti dello sfondo non coperti dalla traslazione di B lungo il bordo esterno di A.



Proprietà di apertura e chiusura

Come la dilatazione e l'erosione, anche l'apertura e la chiusura sono operazioni duali rispetto al complemento ed alla riflessione:

- $(A \bullet B)^c = A^c \circ \hat{B}$
- $(A \circ B)^c = A^c \bullet \hat{B}$

Inoltre, valgono le seguenti proprietà:

- $A \circ B \subseteq A \subseteq A \bullet B$
- $(A \circ B) \circ B = A \circ B$
- $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$
- $C \subseteq D \Rightarrow C \circ B \subseteq D \circ B$
- $C \subseteq D \Rightarrow C \bullet B \subseteq D \bullet B$

Apertura e chiusura: esempio

- Le operazioni di apertura e chiusura possono essere utilizzate per filtrare il rumore.
- L'impronta digitale in A è corrotta dal rumore.
- Applicando l'erosione, si elimina il rumore esterno, ma si amplia il rumore interno alle impronte.
- Una successiva dilatazione permette di ripristinare la dimensione originale delle creste e di neutralizzare il rumore interno.
- erosione + dilatazione = apertura

A | B | $A \ominus B$ | $(A \ominus B) \oplus B = A \circ B$

Apertura e chiusura: esempio (2)

- L'apertura ha rimosso il rumore, ma ha causato l'interruzione di alcune creste.
- Applicando la dilatazione si può recuperare la continuità della maggior parte delle creste interrotte.
- Una successiva erosione ripristina lo spessore delle creste.
- dilatazione + erosione = chiusura

$(A \circ B) \oplus B$ | $[(A \circ B) \oplus B] \ominus B = (A \circ B) \bullet B$

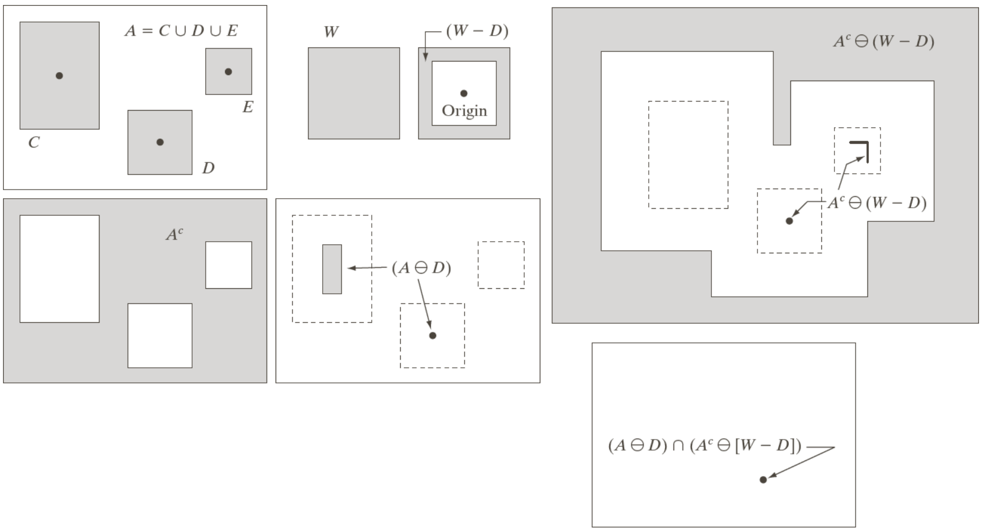
Hit or miss

- La trasformazione *hit-or-miss* serve per l'individuazione di forme disgiunte.
  - Gli oggetti devono essere separati da almeno un pixel di sfondo.
- L'elaborazione è basata su un elemento strutturante (con la forma dell'oggetto da individuare) e il suo sfondo locale (una finestra più larga dell'elemento strutturante).
- Sia A un insieme costituito da più regioni, $A = C \cup D \cup E$, B la forma da identificare e il suo sfondo locale,
  $B = (D,\ W - D) = (B_1,\ B_2)$.
- La trasformazione hit-or-miss $A \circledast B$ è definita come:

$$A \circledast B = A \ominus D \cap (A^c \ominus (W - D))$$

- Definizioni equivalenti:
  - $A \circledast B = A \ominus B_1 \cap A^c \ominus B_2$
  - $A \circledast B = A \ominus B_1 - A^c \oplus \hat{B}_2$

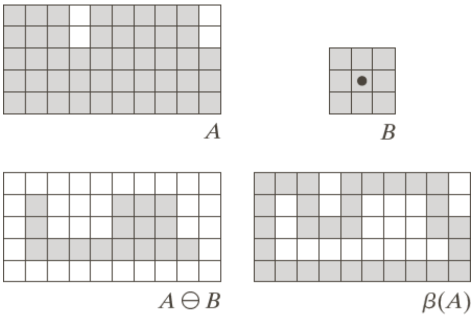
Hit or miss (2)



Estrazione di contorni

- Il bordo di A, $\beta(A)$, si può ottenere come:

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$



- La forma (e la dimensione) di B influisce sullo spessore del contorno.

Riempimento di vuoti

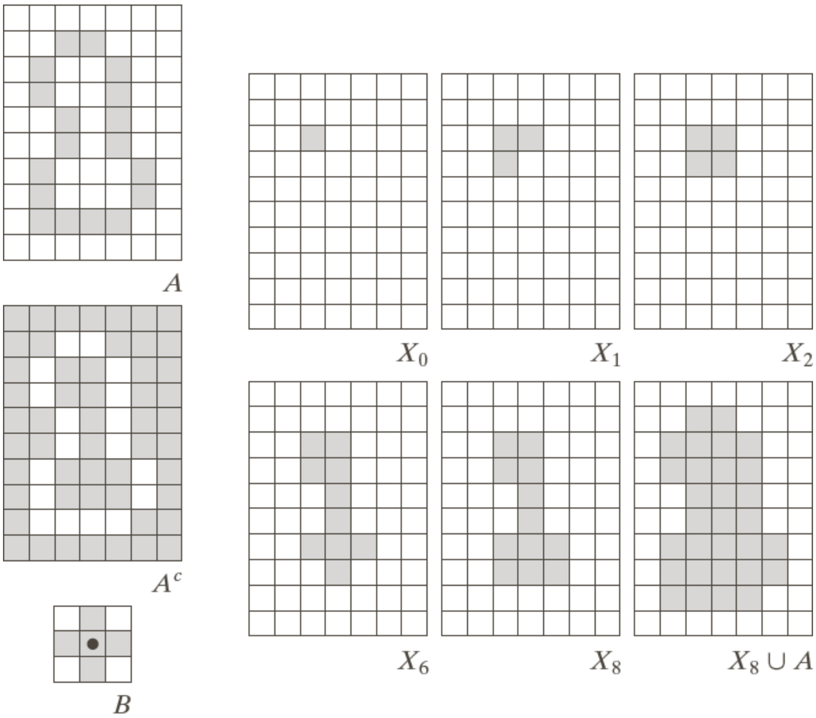
- Un vuoto (*hole*) è una regione di sfondo circondata da un bordo connesso di elementi di primo piano (*foreground*).
- Sia A un insieme contenente bordi 8-connessi che racchiudono una regione di sfondo (vuoti), i quali devono essere riempiti (cioè posti a 1).
- Si costruisce una sequenza $X_0, \ldots, X_k$, dove X_0 è un insieme contenente un punto di ogni vuoto e X_j è definito come:

$$X_j = (X_{j-1} \oplus B) \cap A^c$$

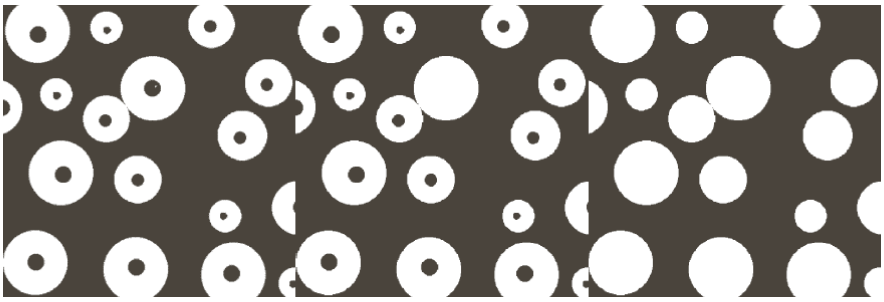
per $B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$

- L'algoritmo termina per un k tale che $X_k = X_{k-1}$, X_k contiene tutti i vuoti riempiti.
- Quindi, $A \cup X_k$ contiene A senza vuoti.
- L'intersezione con A^c vincola la dilatazione all'interno della regione di interesse.

Riempimento di vuoti (2)



Riempimento di vuoti: esempio



- L'immagine binarizzata di un gruppo di sfere metalliche contiene delle regioni interne dovute al riflesso.
- Possono essere eliminate con un algoritmo basato sul riempimento dei vuoti.

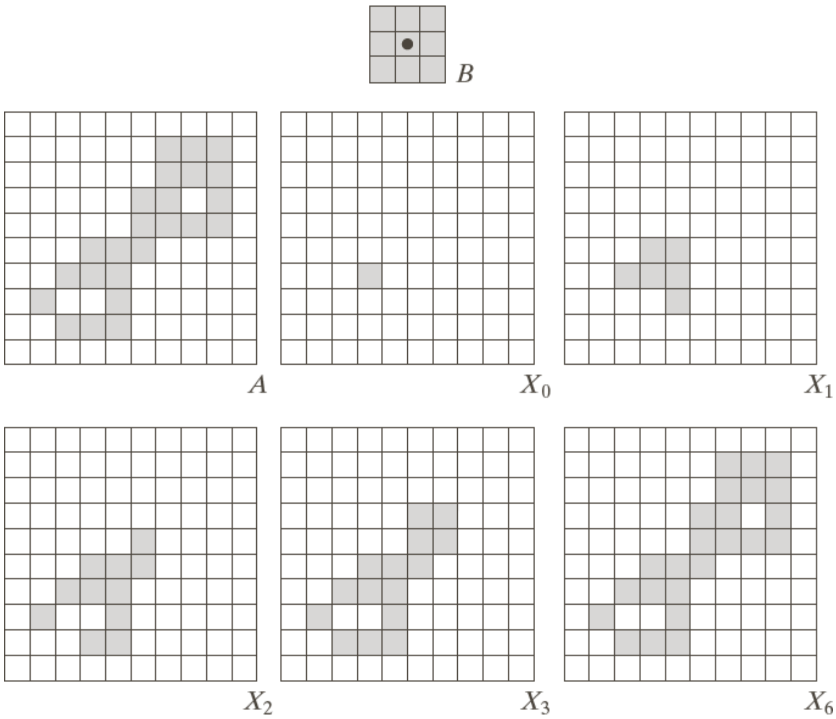
Estrazione di componenti connesse

- L'estrazione di componenti connesse di una immagine binaria è una delle procedure di base per l'elaborazione automatica di immagini digitali.
- Sia A un insieme contenente una o più componenti connesse, X_0 contenente un punto per ogni componente connessa di A e X_k definito come segue:

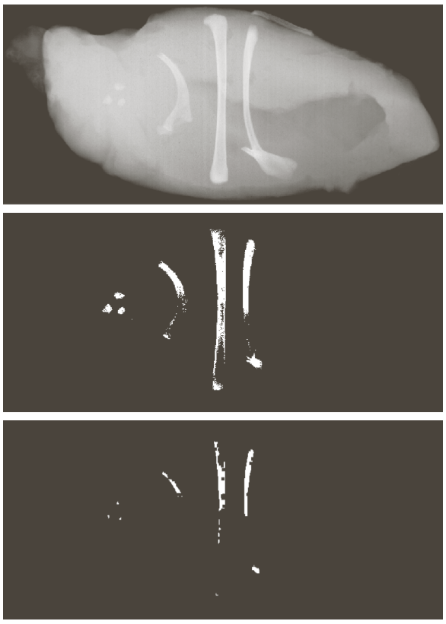
$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A$$

  dove B è un elemento strutturante.
- Per $X_k = X_{k-1}$, l'insieme X_k contiene tutte le componenti connesse di A.
- Nota: il meccanismo è simile a quello per il riempimento di vuoti, ma utilizza A (invece di A^c) per mascherare la dilatazione.

Estrazione di componenti connesse (2)



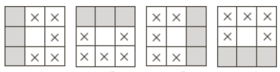
Estrazione di componenti connesse: esempio



- La presenza di ossa all'interno di un petto di pollo può essere rilevata da un'immagine a raggi X.
- Dopo un'opportuna sogliatura, l'erosione con un elemento strutturante adeguato lascia solo gli oggetti che non sono imputabili al rumore.
- Il conteggio dei pixel delle componenti connesse risultanti permette di stimare la dimensione delle ossa non rimosse.

Involucro convesso

- L'involucro convesso (*convex hull*), H, di un insieme A è il più piccolo poligono convesso contenente A.
  - Una figura geometrica è convessa se il segmento congiungente due punti qualsiasi della figura è interamente contenuto nella figura stessa.
- Siano , B^1, B^2, B^3 e B^4 gli elementi strutturanti:



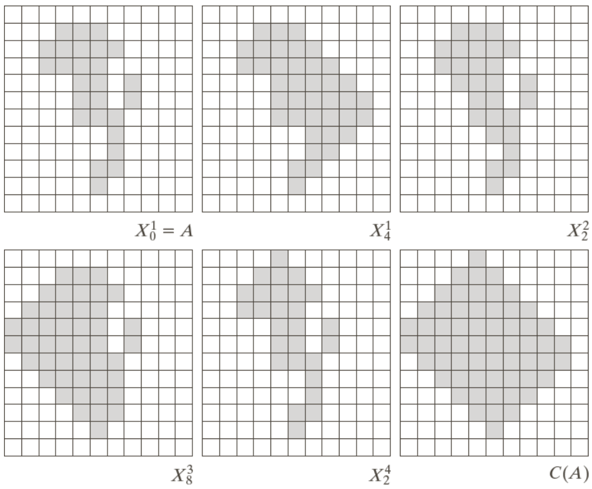
B^1 B^2 B^3 B^4

e $X_k^i = (X_{k-1}^i \circledast B^i) \cup A$, con $X_0^i = A$.
- Siano $D^i = X_k^i$, per k tale che $X_k^i = X_{k-1}^i$, per ogni i.
- L'involucro convesso di A, $C(A)$, è calcolabile come:

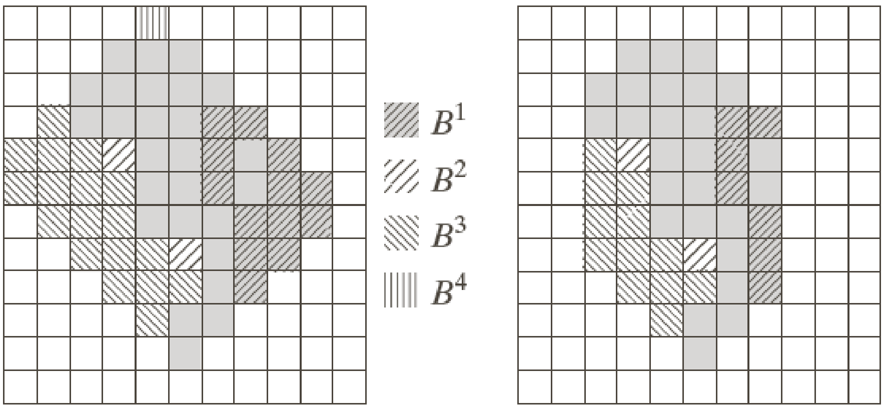
$$C(A) = \bigcup_i D^i$$

Involucro convesso: algoritmo

- Nella pratica, partendo da A, si itera la trasformazione hit-or-miss con B^1, fino ad ottenere una figura stabile.
- La procedura si ripete con B^2, B^3 e B^4.
- L'unione dei quattro insiemi ottenuti e di A fornisce $C(A)$.



Involucro convesso: note



- La trasformazione hit-or-miss usata non richiede lo sfondo locale dell'elemento strutturante.
- Ogni B^i aggiunge elementi in una direzione.
- Può essere utile limitare la procedura in modo che l'accrescimento avvenga solo all'interno del rettangolo che contiene A (*bounding box*).

.

Assottigliamento

- L'assottigliamento (*thinning*) di un insieme A attraverso B, $A \otimes B$, si può definire come:

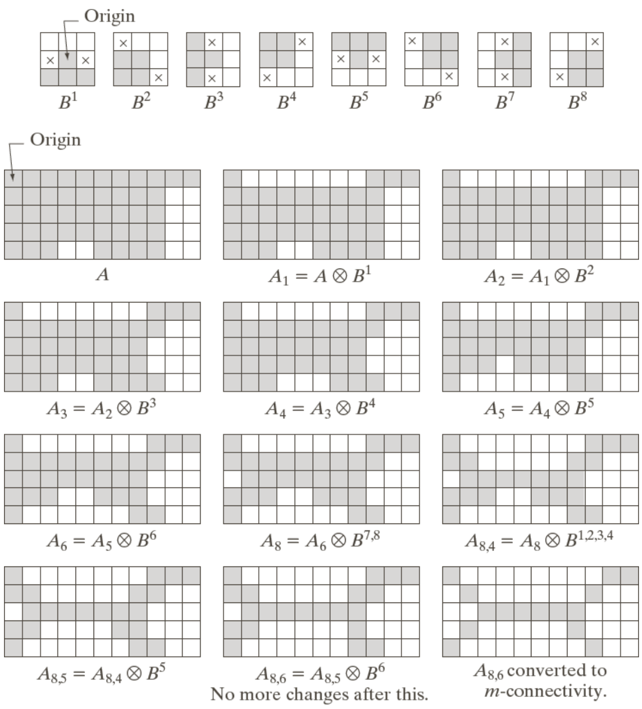
$$A \otimes B = A - (A \circledast B) = A \cap (A \circledast B)^c$$

  - La trasformazione hit-or-miss usata non richiede lo sfondo locale.
- Talvolta può essere utile definire diversi elementi strutturanti per le diverse direzioni, da applicarsi in sequenza: $\{B\} = \{B^1, \ldots, B^n\}$:

$$A \otimes \{B\} = (\cdots((A \otimes B^1) \otimes B^2) \cdots) \otimes B^n$$

- Il risultato può poi essere ulteriormente elaborato per evitare percorsi multipli (m-connettività).

Assottigliamento: esempio



Ispessimento

- L'ispessimento (*thickening*) di un insieme A attraverso B, $A \otimes B$, si può definire come:

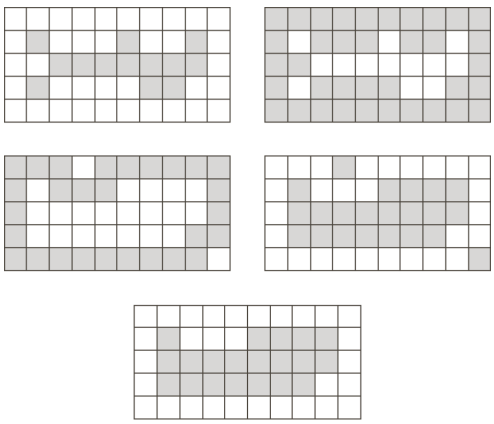
$$A \odot B = A \cup (A \circledast B)$$

  - La trasformazione hit-or-miss usata non richiede lo sfondo locale.
- E' la trasformazione duale dell'assottigliamento.
- Può essere definita usando una sequenza di elementi strutturanti:

$$A \odot \{B\} = (\cdots((A \odot B^1) \odot B^2) \cdots) \odot B^n$$

  dove gli elementi strutturanti sono i complementari di quelli dell'assotigliamento.

Ispessimento: esempio



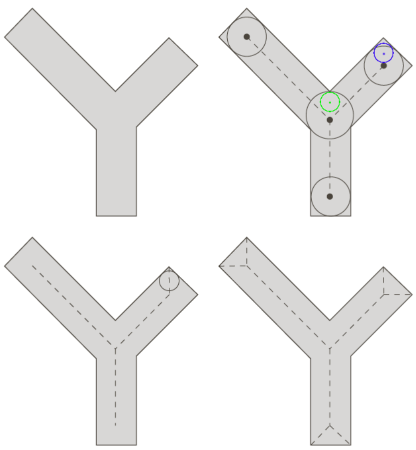
- L'ispessimento si opera spesso per assottigliamento dello sfondo.
- Questo metodo può produrre dei punti disconnessi, che devono essere poi rimossi, ma lo sfondo assottigliato limita l'ispessimento e il risultato è generalmente migliore dell'applicazione diretta dell'algoritmo di ispessimento.

Scheletrizzazione

- Lo *scheletro*, $S(A)$, di un insieme A può essere definito intuitivamente pensando di coprire tale insieme con una collezione minima di dischi circolari.
- L'insieme di punti nei quali posizionare tali dischi è lo scheletro di A.
- Più formalmente, si definisce il concetto di *disco massimo*:
  - un disco $(D)_z$, posizionato in $z \in A$ è detto *massimo*, se non è possibile posizionare nessun altro disco completamente incluso in A tale da contenere $(D)_z$;
- e si definisce lo scheletro di A, $S(A)$ come:

$$S(A) = \{z \in A \,|\, (D)_z \text{ è disco massimo in } A$$

Scheletro



(a) (b)
(c) (d)

(a) L'insieme considerato, A.

(b) I dischi neri sono dischi massimi in A. Il disco verde non è disco massimo perchè esiste un disco che lo include ed è a sua volta incluso in A. Il disco blu è centrato in un punto che non appartiene alle linee tratteggiate: i punti delle linee tratteggiate sono propriamente incluse in $S(A)$.

(c) Individuazione di nuovi punti di $S(A)$.

(d) Lo scheletro di A, $S(A)$.

Definizione morfologica di scheletro

- Lo *scheletro*, $S(A)$, di un insieme A può essere definito in termini di operazioni morfologiche.
- Si può dimostrare che:

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)$$

con

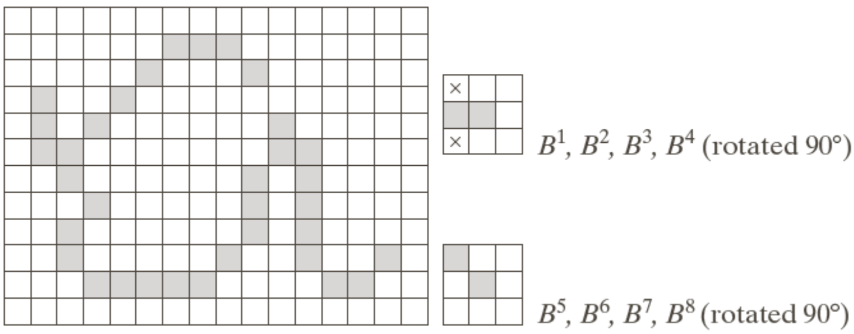
$$S_k(A) = (A \ominus^k B) - (A \ominus^k B) \circ B$$

dove B è un elemento strutturante e $(A \ominus^k B)$ indica k erosioni successive e K è l'ultima iterazione prima che l'insieme risultante diventi vuoto: $K = \max\{k \mid A \ominus^k B \neq \emptyset\}$.

Potatura

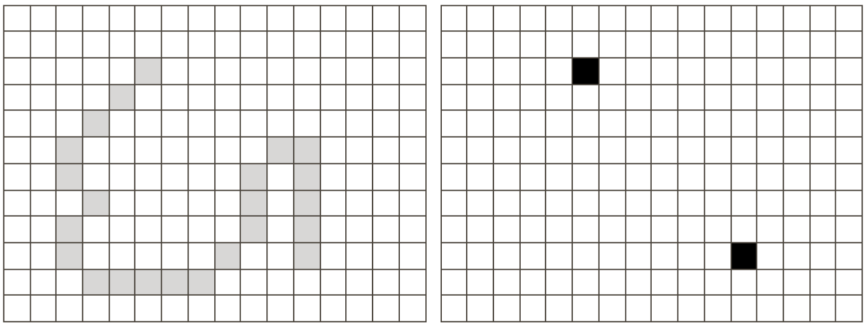
- La potatura (*pruning*) è il tipico post-processing degli algoritmi di scheletrizzazione;
  - generalmente, si hanno alcune diramazioni spurie.

$$X_1 = A \otimes \{B\}$$



- Si ipotizza che ogni diramazione con meno di tre pixel sia spuria.
- $\{B\}$: tre volte la sequenza B^1–B^8

Potatura (2)



X_1 X_2

- Si ottiene l'insieme dei punti terminali, X_2:

$$X_2 = \bigcup_{k=1}^{8} (X_1 \circledast B^k)$$

Potatura

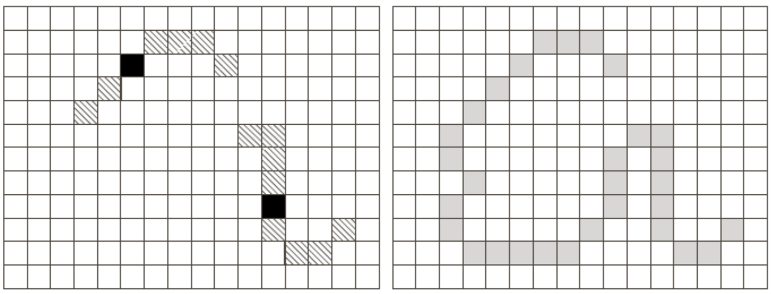
- Si dilatano i punti terminali, vincolandoli con l'insieme di partenza, A:

$$X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A \text{ (per tre volte)}$$

$$H = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- La potatura termina con l'unione dei due insiemi intermedi:

$$X_4 = X_1 \cup X_3$$



X_3 X_4