Fondamenti di Informatica

per la Sicurezza

a.a. 2008/09

Logica dei predicati

Stefano Ferrari

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE

Indovinello

Frase 1, 8, 5, 5

$$\exists x(\neg freddo(y) \wedge piace(x, y))$$

Limiti del calcolo proposizionale

Alcune inferenze logiche non possono venire giustificate sulla base del calcolo proposizionale.

Esempi:

- Ogni architetto è laureato.
  Pietro non è laureato, quindi Pietro non è architetto.
- Nessun coccodrillo è un'orata.
  Le orate sono pesci, quindi qualche pesce non è un coccodrillo.

Granularità

Le proposizioni sono costituite da:

- un soggetto (e.g., "coccodrillo");
  - eventualmente quantificato ("*nessun* coccodrillo", "*ogni* architetto");
- un predicato (e.g., "è un orata").

Il soggetto descrive l'argomento del discorso.

Il predicato descrive proprietà e relazioni dell'argomento, ciò che si afferma o si nega a proposito del soggetto.

Calcolo dei predicati (1)

Estensione della logica delle proposizioni:

- costanti: sono gli elementi dell’universo del discorso;
  - esempio: se si esprimono ragionamenti sulle persone, ogni singola persona è una costante;
- variabili: assumono un valore nell’universo del discorso;
  - esempio: nei discorsi comuni, gli ipotetici Tizio, Caio e Sempronio assumono la funzione di variabili;
- funzioni: combinano gli elementi dell’universo del discorso (e danno luogo a nuovi elementi);
  - esempio: “la moglie di Tizio” è una funzione che applicata ad una persona restituisce un’altra persona;

Calcolo dei predicati (2)

- predicati: sono funzioni logiche che si applicano ad elementi dell’universo del discorso;
  - esempio: “Tizio è un architetto”, “Caio e Sempronio sono amici”;
- quantificatori: precisano l’estensione di un predicato (vincolano i valori assumibili dagli argomenti);

  quantificatore universale $\forall$, per ogni:
  - esempio: “Tutti i nuotatori sono sportivi”;

  quantificatore esistenziale $\exists$, esiste (almeno un):
  - esempio: “a qualcuno piacciono gli spinaci”.

Esempi

- "Lassù qualcuno mi ama" (1956):

$$\exists x(lassu'(x) \wedge ama(x, Io))$$

- "Tutti pazzi per Mary" (1998):

$$\forall x(uomo(x) \rightarrow pazzo(x, Mary))$$

Quantificatori (1)

I quantificatori non sono commutativi.

Esempio:

Ognuno degli iscritti ha un numero di matricola.

$\forall persona\, \exists numero\, ($
$iscritto(persona) \wedge matricola(numero) \rightarrow$
$immatricolato(persona, numero))$

È diverso da:

$\exists numero\, \forall persona\, ($
$iscritto(persona) \wedge matricola(numero) \rightarrow$
$immatricolato(persona, numero))$

Tutti gli iscritti hanno lo stesso numero di matricola.

Quantificatori (2)

I quantificatori $\exists$ e $\forall$ sono una generalizzazione dei connettivi $\vee$ e $\wedge$.

Infatti, se l'insieme $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ è l'universo del discorso:

- $\exists x\, A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \vee A(x_2) \vee A(x_3)$
- $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge A(x_3)$

Quantificatori (3)

Sarebbe sufficiente definire un solo quantificatore:

- $\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x\, \neg A(x)$
- $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\, \neg A(x)$

Nota: generalizzano le leggi di De Morgan.

Esempi:

- “tutti i palloni sono tondi” $\Leftrightarrow$ “non esiste un pallone che non sia tondo”
- “esiste un mammifero che vola” $\Leftrightarrow$ “non tutti i mammiferi non sanno volare”

Descrizione formale (1)

La descrizione formale della sintassi della logica dei predicati è basata sulla definizione di termini e formule.

Sono termini:

- una costante;
- una variabile;
- una funzione n-aria $f(t_1, \ldots, t_n)$, dove $t_1, \ldots, t_n$ sono termini.

Descrizione formale (2)

Sono formule:

- il predicato $p(t_1, \ldots, t_n)$, dove $t_1, \ldots, t_n$ sono termini;
- le espressioni del tipo:
  - $A \vee B$
  - $A \wedge B$
  - $\neg A$
  - $\forall x\, A$
  - $\exists x\, A$

  dove A e B sono formule e x è una variabile.

Definizioni

Nella formula $\forall x\, A$:

- A si chiama ambito o campo d'azione del quantificatore $\forall$;
- x si dice variabile vincolata (o quantificata).

Una variabile non vincolata di dice libera.

Una formula che non contiene variabili libere si dice chiusa.

Una formula che non contiene variabili si dice ground.

Dimostrazioni formali

Possono essere eseguite usando le regole di inferenza della logica proposizionale e con le seguenti regole di inferenza aggiuntive:

- $\forall x\, A(x) \Rightarrow A(t)$ (specializzazione);
- $A \Rightarrow \forall x\, A$ (generalizzazione);
- $(A(x) \wedge x = t) \Rightarrow A(t)$, se tutte le occorrenze libere di t rimangono libere in $A(t)$ (sostituzione).

Riepilogando

La logica dei predicati permette di analizzare gli elementi di cui la proposizione è composta.

Essa è quindi uno strumento più potente (e più complesso) della logica proposizionale.

Alcune semplici inferenze espresse nella logica dei predicati possono essere dimostrate senza ricorrere ad una dimostrazione formale.

Predicati ed insiemi

Esiste una corrispondenza tra i predicati e gli insiemi:

- i predicati definiscono insiemi;
  - esempio: gli elementi, x, per cui il predicato $architetto(x)$ è vero, costituiscono l'insieme degli architetti;
- la disgiunzione definisce un'unione;
  - esempio: gli elementi, x, che rendono vero il predicato $architetto(x) \vee ingegnere(x)$, costituiscono l'insieme delle persone che sono architetto o ingegnere (o entrambi);
- la congiunzione definisce un'intersezione;
  - esempio: gli elementi, x, che rendono vero il predicato $architetto(x) \wedge biondo(x)$, costituiscono l'insieme delle persone che sono architetto e che sono bionde.

Dimostrazioni grafiche

Sfruttando la corrispondenza tra formule di logica posizionale e insiemi, è possibile effettuare o confutare la validità di inferenze con il solo supporto dei grafici di Eulero-Venn.

In particolare:

- le costanti e le variabili sono punti del piano;
- i predicati sono regioni del piano;
- le operazioni logiche combinano le regioni del piano come nei diagrammi di Eulero-Venn.

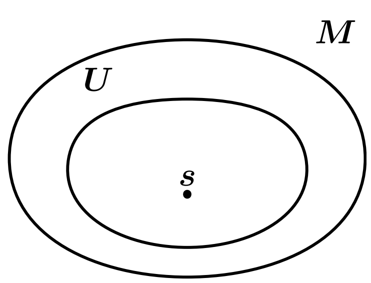
Un'inferenza sarà valida se il grafico delle assunzioni descrive una situazione compatibile con la tesi, ma non con la sua negazione.

Esempio 1

Ip1: Gli uomini sono mortali.
Ip2: Socrate è un uomo.
Tesi: Socrate è mortale.

Ip1: $\forall x(U(x) \rightarrow M(x))$
Ip2: $U(s)$
Tesi: $M(s)$

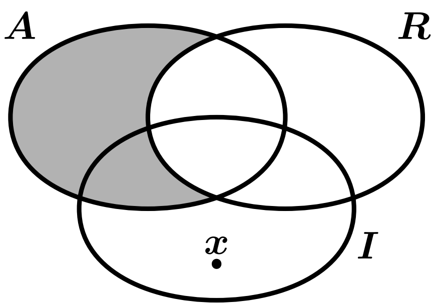
Ip1: $U \subseteq M$
Ip2: $s \in U$
Tesi: $s \in M$



Esempio 2

Ip1: Tutte le api ronzano.
Ip2: Qualche insetto non ronza.
Tesi: Qualche insetto non è un'ape.

Ip1: $\forall x(A(x) \rightarrow R(x))$
Ip2: $\exists x(I(x) \wedge \neg R(x))$
Tesi: $\exists x(I(x) \wedge \neg A(x))$



Ip1: $A \subseteq R$
Ip2: $\exists x \in I - R$
Tesi: $\exists x \in I - A$

Soluzione dell'indovinello

$\exists x(\neg freddo(y) \wedge piace(x, y))$:

- A qualcuno piace caldo (Some like it hot, 1959)