

Università degli Studi di Milano

Laurea in Sicurezza dei sistemi e delle reti informatiche

Esercizi sul calcolo del numero di bit

STEFANO FERRARI

Fondamenti di informatica per la sicurezza

Indice

ESERCIZI	4
1. Esercizi di calcolo del numero di bit	5
SOLUZIONI	7
1. Esercizi di calcolo del numero di bit	8

Esercizi

1. Esercizi di calcolo del numero di bit

1. Quanti bit servono per codificare un numero di telefono a sei cifre?

[20]

2. Quante configurazioni può assumere un semaforo, nell'ipotesi che:

- (a) ogni luce possa essere accesa indipendentemente dalle altre?
- (b) ogni luce sia indipendente dalle altre e che possa essere accesa, spenta o lampeggiante?
- (c) le luci possano essere accese o spente in modo indipendente, e che il semaforo abbia quattro luci?

Indicare anche il numero di bit necessari per codificare ciascuna situazione.

[8 e 3 bit, 27 e 5 bit, 16 e 4 bit]

3. Un parcheggio ha 50 posti macchina.

- (a) Quanti bit servono per codificare il numero di macchine presenti?
- (b) Quanti bit servono per rappresentare l'occupazione di posti auto?
- (c) Un dispositivo registra ad ogni minuto il numero di macchine presenti. Di quanti bit deve essere la sua memoria per mantenere la registrazione delle ultime 24 ore?

[6, 50, 8640 (o 8169)]

4. Un omino lego base è composto da tre pezzi: testa, torso, gambe.

Sono disponibili i seguenti componenti:

testa	torso	gambe
sorridente con gli occhiali con la barba	blu rosso giallo verde bianco	bianche blu

Inoltre sono disponibili i seguenti accessori da agganciare alle mani: pala, torcia, piccone.

Si calcoli:

- (a) il numero di bit necessari per codificare ciascuno dei componenti principali (testa, torso e gambe);
- (b) il numero di bit necessari per codificare l'aspetto di un omino lego base che può impugnare fino a due accessori.

[2, 3, 1, 9]

5. Una macchinina radiocomandata è personalizzabile assemblando diversi tipi di gomme, motore, e carrozzeria.

Le gomme sono disponibili in tre versioni (dure, medie e morbide), il motore in due (basso consumo, medio consumo) e la carrozzeria è disponibile in 17 forme diverse.

Inoltre il kit di montaggio prevede tre confezioni di smalto, a scelta su 5 colori.

Si calcoli:

- (a) il numero di bit necessari per codificare ciascuno dei tre componenti (gomme, motore, carrozzeria);
- (b) il numero di bit necessari per codificare la configurazione di un kit di montaggio, considerando quindi, oltre ai componenti base, anche le confezioni di smalto.

[2, 1, 5, 12]

6. Un negozio di mobili offre cucine componibili con la seguente disponibilità di moduli:

- pensili (nei tipi: armadietto, mensola);
- tavoli (nei tipi: da quattro persone, da sei, da sei allungabile);
- sedie (nei tipi: sedia tradizionale, trespolo, sgabello);

- armadi (nei tipi: senza vetrina, con vetrina).

Ogni cucina può essere composta da:

- 0, 1 o 2 pensili;
- 0 o 1 tavoli;
- 0, 1, 2, 4, 6 o 8 sedie;
- 0, 1, 2, 3 armadi.

Gli elementi possono essere di ogni tipo, ma il totale deve essere limitato alle quantità specificate.

Si calcoli:

- (a) il numero di bit necessari per codificare ciascun tipo di modulo (pensili, tavoli, sedie e armadi);
- (b) il numero di bit necessari per codificare la configurazione di una cucina.

[1, 2, 2, 1, 15]

7. Un appassionato di numismatica possiede una collezione di 325 monete, ognuna delle quali con le seguenti caratteristiche:

- taglio (0,01, 0,02, 0,05, 0,1, 0,2, 0,5, 1 e 2 euro);
- nazione (Italia, Francia, Spagna);
- anno di emissione (1999, 2000, 2001, 2002).

Si calcoli:

- (a) il numero di bit necessari per codificare ciascuna delle tre caratteristiche;
- (b) il numero di bit necessari per codificare ciascuna moneta.

[3, 2, 2, 7]

8. Un collezionista di trenini elettrici ha una collezione di 35 elementi, ognuno dei quali si differenzia per:

- funzione (merci, carrozza passeggeri, locomotiva);
- materiale (plastica, metallo);
- produttore (Lima, Rivarossi, Fleischmann, Marklin, Kato);

Si calcoli:

- (a) il numero di bit necessari per codificare ciascuna delle due caratteristiche;
- (b) il numero di bit necessari per codificare ciascun elemento;
- (c) il numero di bit necessari per codificare ciascun convoglio che possa essere formato con tre elementi della collezione.

[2, 1, 3, 5, 16]

Soluzioni

1. Esercizi di calcolo del numero di bit

1. Ogni numero di telefono è composto da una sequenza di 6 cifre decimali, ognuna delle quali può essere ripetuta. Il numero di configurazioni possibili è quindi dato dalle disposizioni con ripetizione di 10 oggetti su 6 posti: $D_r(10, 6) = 10^6$.

Servono quindi $\lceil \log_2 10^6 \rceil$ bit per rappresentare un numero telefonico di 6 cifre. Poiché $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$, $\lceil \log_2 10^6 \rceil = \lceil \log_2(2^6 \cdot 5^6) \rceil = \lceil \log_2 2^6 + \log_2 5^6 \rceil = \lceil 6 + \log_2 15625 \rceil = 6 + \lceil \log_2 15625 \rceil = 6 + 14 = 20$.

Pertanto, saranno necessari 20 bit.

Nota 1: Se fosse sufficiente un calcolo approssimato per eccesso, si potrebbe procedere notando che 2^{10} è di poco superiore a 10^3 . Quindi $10^6 = (10^3)^2$ può essere approssimato (per eccesso) con $(2^{10})^2 = 2^{20}$. Pertanto, poiché $\lceil \log_2 10^6 \rceil \approx \lceil \log_2 2^{20} \rceil = 20$, 20 bit potrebbe essere una risposta ragionevolmente argomentata, sebbene non supportata da un calcolo preciso.

Nota 2: Si può obiettare che la prima cifra di un numero di telefono a sei cifre debba essere diversa da zero. In tal caso, il numero di configurazioni diverse diventerebbe $9 \cdot D_r(10, 5) = 9 \cdot 10^5 = 2^5 \cdot 5^5 \cdot 9$ e richiederebbe comunque 20 bit per la codifica.

Nota 3: Se si scegliesse di codificare il numero telefonico cifra per cifra (cioè con un gruppo di bit dedicato ad ogni cifra), bisognerebbe usare 4 bit per cifra ($\lceil \log_2 10 \rceil = 4$), e quindi un totale di 24 bit.

2. (a) Un semaforo ha tipicamente 3 luci ognuna delle quali ha 2 possibili stati (acceso o spento). L'ordine ha importanza (le luci sono di colore differente e hanno posizione fissata) e sono ammesse le ripetizioni (le luci sono indipendenti). Pertanto, il numero di configurazioni è calcolabile come il numero di disposizioni con ripetizione di 2 oggetti su 3 po-

sti: $D_r(2, 3) = 2^3 = 8$. Il numero di bit necessario per rappresentare una configurazione dell'oggetto qui considerato è $\lceil \log_2 2^3 \rceil = 3$.

- (b) In questo caso, il semaforo ha 3 luci ognuna delle quali può assumere 3 stati (acceso, spento o lampeggiante). Pertanto, il numero di configurazioni è calcolabile come il numero di disposizioni con ripetizione di 3 oggetti su 3 posti: $D_r(3, 3) = 3^3 = 27$. Il numero di bit necessario per rappresentare una configurazione di un oggetto del genere è $\lceil \log_2 27 \rceil = 5$ (2^4 è 16, troppo piccolo e 2^5 è 32, maggiore di 27).
- (c) Con ragionamento analogo al caso (a), si avranno $D_r(2, 4) = 2^4 = 16$ configurazioni diverse. Saranno quindi necessari $\lceil \log_2 2^4 \rceil = 4$ bit per codificare una configurazione del semaforo in esame.

3. Nel parcheggio possono trovar posto fino a 50 automobili.

- (a) Le macchine possono essere un qualsiasi numero intero compreso fra 0 e 50, estremi inclusi. Quindi il numero di configurazioni possibile è 51. La potenza di due immediatamente superiore a 51 è $64 = 2^6$.

Quindi la risposta è 6 bit.

- (b) In questo caso si vuole sapere non solo quante macchine sono presenti nel parcheggio, ma anche dove sono. Ogni posto auto può essere occupato o libero (2 configurazioni per posto auto), i posti auto sono 50, quindi l'occupazione del parcheggio può assumere 2^{50} configurazioni.

Serviranno quindi 50 bit in questo caso.

- (c) In 24 ore ci sono $24 \times 60 = 1440$ minuti. Se ogni minuto occupa 6 bit, una memoria di $6 \times 1440 = 8640$ bit sarà

sufficiente per la registrazione della giornata.

Un calcolo più preciso può essere fatto considerando che il valore relativo ad ogni minuto può assumere 51 configurazioni diverse. Il numero totale di configurazioni sarebbe quindi di 51^{1440} , il che conduce a $\lceil \log_2 51^{1440} \rceil = \lceil 1440 \cdot \log_2 51 \rceil = 8169$ bit.

Nota: Il calcolo di $\log_2 51$, necessario per il calcolo accurato del numero di bit necessari, non può essere effettuato tramite semplici tecniche aritmetiche (richiede l'uso di una calcolatrice o di tabelle logaritmiche).

4. (a) testa $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$ bit
torso $\lceil \log_2 5 \rceil = 3$ bit
gambe $\lceil \log_2 2 \rceil = 1$ bit
- (b) Poiché ogni mano può essere libera o impugnare un accessorio, si può ritenere di avere a disposizione 4 accessori (mano vuota, pala, torcia e piccone). Quindi, facendo distinzione tra mano destra e sinistra e permettendo l'utilizzo dello stesso accessorio in entrambe le mani, il numero di configurazioni dato dagli accessori impugnati dall'omino è pari alle disposizioni di 4 oggetti su 2 posti, $D_r(4, 2) = 2^4$. Dato il numero di configurazioni dei singoli componenti, per la regola del prodotto, si possono avere $3 \times 5 \times 2 \times 2^4$ configurazioni, necessitando così di $\lceil \log_2(3 \cdot 5 \cdot 2^5) \rceil = \lceil \log_2 15 + \log_2 2^5 \rceil = \lceil \log_2 15 \rceil + 5 = 4 + 5 = 9$ bit per rappresentare un omino di lego.
5. (a) gomme $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$ bit
motore $\lceil \log_2 2 \rceil = 1$ bit
carrozzeria $\lceil \log_2 17 \rceil = 5$ bit
- (b) Poiché in un kit ci sono 3 confezioni di smalto, scelte su 5 colori possibili (eventualmente ripetuti più volte), e poiché l'ordine dei colori non conta, il numero di configurazioni pos-

sibili per le confezioni di smalto saranno date dalle combinazioni con ripetizione di 5 oggetti su 3 posti, $C_r(5, 3) = C(7, 3) = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$. Per la regola del prodotto, quindi, considerando che un kit di montaggio, oltre che dagli smalti, è caratterizzato anche da gomme, motore e carrozzeria, si potranno avere $3 \times 2 \times 17 \times 35$ configurazioni diverse di kit di montaggio. Pertanto, saranno necessari $\lceil \log_2(3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 35) \rceil = \lceil \log_2(1785 \cdot 2) \rceil = \lceil \log_2 1785 + 2 \rceil = \lceil \log_2 1785 \rceil + 1 = 11 + 1 = 12$ bit.

6. (a) pensili $\lceil \log_2 2 \rceil = 1$ bit
tavoli $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$ bit
sedie $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$ bit
armadi $\lceil \log_2 2 \rceil = 1$ bit
- (b) Il numero di configurazioni di ciascun componente di una cucina può essere formalizzato attraverso le combinazioni con ripetizione. Infatti, i componenti possono essere ripetuti e non ha senso considerare l'ordine con cui i singoli elementi vengono elencati: una cucina con una mensola ed un armadietto non è distinguibile da una cucina con un armadietto ed una mensola.

Inoltre, poiché i componenti di una cucina possono avere diverse numerosità, il numero di configurazioni relativo a ciascun componente è dato dalla somma delle configurazioni di ciascuna numerosità. Per esempio, possono essere presenti 0, 1 o 2 pensili, i quali, sono di 2 tipi. Quindi si hanno $C_r(2, 0)$ possibili configurazioni con nessun pensile, $C_r(2, 1)$ possibili configurazioni con un pensile, e $C_r(2, 2)$ possibili configurazioni con due pensili.

Quindi il numero di configurazioni dei singoli componenti è:

- pensili: $C_r(2, 0) + C_r(2, 1) + C_r(2, 2) = 1 + 2 + 3 = 6$
- tavoli: $C_r(3, 0) + C_r(3, 1) = 1 + 3 = 4$

- sedie: $C_r(3, 0) + C_r(3, 1) + C_r(3, 2) + C_r(3, 4) + C_r(3, 6) + C_r(3, 8) = 1 + 3 + 6 + 15 + 28 + 45 = 98$
- armadi: $C_r(2, 0) + C_r(2, 1) + C_r(2, 2) + C_r(2, 3) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Il numero totale di configurazioni della cucina risulta quindi: $6 \times 4 \times 98 \times 10 = 525 \cdot 2^5$, descrivibili tramite $\lceil \log_2(3 \cdot 5 \cdot 49 \cdot 2^5) \rceil = \lceil \log_2 735 + \log_2 2^5 \rceil = \lceil \log_2 735 \rceil + 5 = 10 + 5 = 15$ bit.

7. (a) taglio $\lceil \log_2 8 \rceil = 3$ bit
deposito $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$ bit
carta di credito $\lceil \log_2 4 \rceil = 2$ bit

- (b) $\lceil \log_2(8 \times 3 \times 4) \rceil = \lceil \log_2 96 \rceil = 7$ bit.

Nota: il numero di monete della collezione è un dato superfluo.

8. (a) funzione $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$ bit
materiale $\lceil \log_2 2 \rceil = 1$ bit
produttore $\lceil \log_2 5 \rceil = 3$ bit
- (b) $\lceil \log_2(3 \times 2 \times 5) \rceil = \lceil \log_2 30 \rceil = 5$ bit.
- (c) Il convoglio viene formato con tre elementi presi da una collezione di 35 oggetti. Inoltre, ogni elemento non può essere ripetuto. Il numero di configurazioni, quindi, è dato dalle disposizioni semplici di 35 oggetti su 3 posti: $D(35, 3) = 35 \cdot 34 \cdot 33 = 39270$. Saranno perciò necessari $\lceil \log_2 39270 \rceil = 16$ bit.