Fondamenti di Informatica

per la Sicurezza

a.a. 2007/08

Calcolo combinatorio

Stefano Ferrari

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE

Codifica e numero di bit necessari

La codifica è una scelta arbitraria basata su una convenzione che chi usa la codifica deve necessariamente conoscere.

Una codifica può essere considerata buona se facilita:

- l'elaborazione nella quale la si vuole utilizzare;
- le operazioni di codifica e decodifica.

Per stabilire quanti bit sono necessari, bisogna conoscere il numero di configurazioni che la codifica deve rappresentare.

Qualche nozione di calcolo combinatorio è indispensabile.

Regola del prodotto

Una regola generale:
se una cosa può essere realizzata in n modi e per ciascuna di queste realizzazioni una seconda cosa può essere realizzata in m modi, allora il numero di realizzazioni possibili è $n \times m$.

Esempio

Una signora ha cinque cappellini, due borsette, sei paia di scarpe e dodici vestiti.

In quanti modi diversi può abbigliarsi?

Per quanto detto sopra, la signora avrà:

$$5 \times 2 \times 6 \times 12 = 720$$

possibilità di scelta.

Permutazioni (1)

Si chiamano permutazioni di n elementi distinti ($n \in \mathbb{N}$, $n > 0$), tutti i raggruppamenti diversi che si possono formare con gli elementi dati, rispettando le seguenti proprietà:

1. ciascun raggruppamento contiene n elementi;
2. uno stesso elemento non può figurare più volte in un raggruppamento;
3. due raggruppamenti sono tra loro distinti se differiscono per l'ordine con cui sono disposti gli elementi.

Permutazioni (2)

n elementi danno luogo a $n!$ permutazioni:

$$P(n) = n!$$

L'operatore indicato con il simbolo ! si chiama fattoriale e assume la seguente forma:

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i & n \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 1 (1)

Sei atleti partecipano ad una gara di corsa.

- Quante possono essere le classifiche finali della gara?
  - Poiché la classifica finale non sarà altro che una permutazione della lista dei partecipanti, ci sono $P(6) = 6! = 720$ ordini di arrivo possibili.
- Quanti bit servono per codificare l'ordine di arrivo?
  - Per codificare in binario 720 configurazioni possibili, servono almeno $\lceil \log_2 720 \rceil = 10$ bit.

Questo ragionamento fornisce il minimo numero di bit da utilizzare, ma non dice come effettuare la codifica.

Esercizio 1 (2)

Si può immaginare una codifica del genere:

- ogni atleta è descritto dal suo pettorale (i numeri da 1 a 6);
- l'ordine di arrivo è rappresentato da una sequenza di sei numeri di pettorale.

In tal caso:

- ogni atleta necessita di 3 bit ($\lceil \log_2 6 \rceil = 3$);
- la codifica della classifica richiede $6 \times 3 = 18$ bit.

La codifica scelta non sarebbe quella di ingombro minimo (10 bit), ma sarebbe semplice da costruire e utilizzare.

Disposizioni (1)

Si dice disposizione semplice di n elementi distinti su k posizioni ($n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$) una collezione di k degli n elementi che rispetti le seguenti proprietà:

1. ciascun raggruppamento contiene k elementi;
2. uno stesso elemento può figurare al più una volta in un raggruppamento;
3. due raggruppamenti sono da considerarsi distinti quando essi differiscono per almeno un elemento, o per l'ordine degli elementi.

Disposizioni (2)

Le disposizioni semplici di n elementi presi k per volta sono in totale $\frac{n!}{(n-k)!}$:

$$D(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Esercizio 2

Sei atleti partecipano ad una gara di corsa.

- In quanti modi diversi si può verificare la tripletta di atleti che arriva sul podio?
  - La classifica dei primi 3 arrivati è una disposizione di 6 elementi su 3 posti: ci possono essere $D(6,3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 =$ $= 120$ configurazioni diverse di atleti sul podio.
- Quanti bit servono per codificare il podio?
  - Per rappresentare 120 configurazioni diverse servono $\lceil \log_2 120 \rceil = 7$ bit.

Disposizioni con ripetizione (1)

Si dice disposizione con ripetizione (o reimmissione) di n elementi distinti su k posizioni ($n, k \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $k > 0$) una collezione di k degli n elementi che rispetti le seguenti proprietà:

1. ciascun raggruppamento contiene k elementi;
2. due qualsiasi raggruppamenti sono da considerarsi distinti quando essi differiscono per almeno un elemento, o per l'ordine degli elementi.

Disposizioni con ripetizione (2)

Rispetto ad una disposizione semplice, quindi, in una disposizione con ripetizione ogni elemento può essere ripetuto.

Le disposizioni con ripetizione di n su k saranno:

$$D_r(n, k) = n^k$$

Esercizio 3

Sei atleti sono impegnati in una gara di triathlon.

- Quante terne dei vincitori in ogni singola gara si possono verificare?
  - Poiché ogni atleta può vincere più di una gara, il numero cercato sono le disposizioni con ripetizione di sei elementi su tre posizioni: $D_r(6, 3) = 6^3 = 216$.
- Quanti bit servono per codificare tale tripletta?
  - Per codificare tale classifica, serviranno almeno $\lceil \log_2 216 \rceil = 8$ bit.

Combinazioni (1)

Si dice combinazione semplice di n elementi distinti su k posizioni ($n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$) una collezione di k degli n elementi che rispetti le seguenti proprietà:

1. ciascun raggruppamento contiene k elementi;
2. uno stesso elemento può figurare al più una volta in un raggruppamento;
3. due raggruppamenti sono da considerarsi diversi soltanto quando differiscono tra loro almeno per un elemento.

Combinazioni (2)

L'ordine degli elementi non ha importanza in una combinazione.

Le combinazioni semplici di n elementi su k posti sono:

$$C(n,k) = \frac{D(n,k)}{P(k)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots (n-k+1)}{k!}$$

La quantità $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ è il coefficiente binomiale di n su k, e viene indicato con:

$$\binom{n}{k}$$

Esercizio 4

Un negozio ha in vetrina lo spazio per esporre solo tre manichini ed un campionario di 7 modelli di giacca.

- Volendo mettere una giacca diversa su ogni manichino, quante vetrine può comporre?
  - Si tratta di calcolare le combinazioni semplici di 7 elementi su 3 posti: $C(7,3) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35$.
- Quanti bit servono per codificare tale composizione?
  - Sono necessari $\lceil \log_2 35 \rceil = 6$ bit.

Combinazioni con ripetizione (1)

Si dice combinazione con ripetizione (o con reimmissione) di n elementi distinti su k ($n, k \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $k > 0$) posizioni una collezione di k degli n elementi che rispetti le seguenti proprietà:

1. ciascun raggruppamento contiene k elementi;
2. due raggruppamenti sono da considerarsi diversi soltanto quando differiscono tra loro almeno per un elemento.

Combinazioni con ripetizione (2)

Uno stesso elemento può quindi comparire più di una volta.

Le combinazioni con ripetizione di n elementi su k posti sono:

$$C_r(n,k) = C(n+k-1,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

Esercizio 5

Un negozio ha in vetrina lo spazio per esporre solo tre manichini ed un campionario di 7 modelli di giacca.

- Quante vetrine potrebbe comporre, se ritenesse accettabile avere più copie della stessa giacca in vetrina?
  - In questo caso, si tratta di calcolare le combinazioni con ripetizione di 7 elementi su 3 posti: $C_r(7,3) = C(9,3) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.
- Quanti bit servono per codificare tale composizione?
  - Sono necessari $\lceil \log_2 84 \rceil = 7$ bit.

Riassumendo

Le permutazioni dicono in quanti modi possiamo scrivere la sequenza degli elementi di un insieme dato.

Le disposizioni e le combinazioni dicono in quanti modi si possono scrivere sequenze di sottoinsiemi di cardinalità data.

La differenza tra combinazioni e disposizioni è che queste ultime tengono in considerazione anche l'ordine degli elementi.