

Fondamenti di Informatica  
per la Sicurezza  
a.a. 2007/08

## Logica dei predicati

Stefano Ferrari



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO  
DIPARTIMENTO DI TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE

## Indovinello

---

Frase 1, 8, 5, 5

$$\exists x(\neg \text{freddo}(y) \wedge \text{piace}(x, y))$$

## Limiti del calcolo proposizionale

Alcune inferenze logiche non possono venire giustificate sulla base del calcolo proposizionale.

Esempi:

- Ogni architetto è laureato.  
Pietro non è laureato, quindi Pietro non è architetto.
- Nessun coccodrillo è un'orata.  
Le orate sono pesci, quindi qualche pesce non è un coccodrillo.

## Granularità

Le proposizioni sono costituite da:

- un **soggetto** (e.g., "coccodrillo");
  - eventualmente **quantificato** ("nessun coccodrillo", "ogni architetto");
- un **predicato** (e.g., "è un orata").

Il soggetto descrive l'argomento del discorso.

Il predicato descrive proprietà e relazioni dell'argomento, ciò che si afferma o si nega a proposito del soggetto.

## Calcolo dei predicati (1)

Estensione della logica delle proposizioni:

- **costanti**: sono gli elementi dell'universo del discorso;
  - esempio: se si esprimono ragionamenti sulle persone, ogni singola persona è una costante;
- **variabili**: assumono un valore nell'universo del discorso;
  - esempio: nei discorsi comuni, gli ipotetici Tizio, Caio e Sempronio assumono la funzione di variabili;
- **funzioni**: combinano gli elementi dell'universo del discorso (e danno luogo a nuovi elementi);
  - esempio: "la moglie di Tizio" è una funzione che applicata ad una persona restituisce un'altra persona;

## Calcolo dei predicati (2)

- **predicati**: sono funzioni logiche che si applicano ad elementi dell'universo del discorso;
  - esempio: "Tizio è un architetto", "Caio e Sempronio sono amici";
- **quantificatori**: precisano l'estensione di un predicato (vincolano i valori assumibili dagli argomenti);
  - quantificatore universale**  $\forall$ , per ogni:
    - esempio: "Tutti i nuotatori sono sportivi";
  - quantificatore esistenziale**  $\exists$ , esiste (almeno un):
    - esempio: "a qualcuno piacciono gli spinaci".

## Esempi

- “Lassù qualcuno mi ama” (1956):

$$\exists x(\textit{lassu}'(x) \wedge \textit{ama}(x, \textit{Io}))$$

- “Tutti pazzi per Mary” (1998):

$$\forall x(\textit{uomo}(x) \rightarrow \textit{pazzo}(x, \textit{Mary}))$$

## Quantificatori (1)

I quantificatori non sono commutativi.

Esempio:

Ognuno degli iscritti ha un numero di matricola.

$$\forall \textit{persona} \exists \textit{numero} ( \\ \textit{iscritto}(\textit{persona}) \wedge \textit{matricola}(\textit{numero}) \rightarrow \\ \textit{immatricolato}(\textit{persona}, \textit{numero}))$$

È diverso da:

$$\exists \textit{numero} \forall \textit{persona} ( \\ \textit{iscritto}(\textit{persona}) \wedge \textit{matricola}(\textit{numero}) \rightarrow \\ \textit{immatricolato}(\textit{persona}, \textit{numero}))$$

Tutti gli iscritti hanno lo stesso numero di matricola.

## Quantificatori (2)

I quantificatori  $\exists$  e  $\forall$  sono una generalizzazione dei connettivi  $\vee$  e  $\wedge$ .

Infatti, se l'insieme  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  è l'universo del discorso:

- $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \vee A(x_2) \vee A(x_3)$
- $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge A(x_3)$

## Quantificatori (3)

Sarebbe sufficiente definire un solo quantificatore:

- $\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x)$
- $\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A(x)$

Nota: generalizzano le leggi di De Morgan.

Esempi:

- "tutti i palloni sono tondi"  $\Leftrightarrow$  "non esiste un pallone che non sia tondo"
- "esiste un mammifero che vola"  $\Leftrightarrow$  "non tutti i mammiferi non sanno volare"

## Descrizione formale (1)

La descrizione formale della sintassi della logica dei predicati è basata sulla definizione di **termini** e **formule**.

Sono **termini**:

- una costante;
- una variabile;
- una funzione  $n$ -aria  $f(t_1, \dots, t_n)$ , dove  $t_1, \dots, t_n$  sono termini.

## Descrizione formale (2)

Sono **formule**:

- il predicato  $p(t_1, \dots, t_n)$ , dove  $t_1, \dots, t_n$  sono termini;
- le espressioni del tipo:
  - $A \vee B$
  - $A \wedge B$
  - $\neg A$
  - $\forall x A$
  - $\exists x A$

dove  $A$  e  $B$  sono formule e  $x$  è una variabile.

## Definizioni

Nella formula  $\forall x A$ :

- $A$  si chiama **ambito** o **campo d'azione** del quantificatore  $\forall$ ;
- $x$  si dice variabile **vincolata** (o **quantificata**).

Una variabile non vincolata si dice **libera**.

Una formula che non contiene variabili libere si dice **chiusa**.

Una formula che non contiene variabili si dice **ground**.

## Dimostrazioni formali

Possono essere eseguite usando le regole di inferenza della logica proposizionale e con le seguenti regole di inferenza aggiuntive:

- $\forall x A(x) \Rightarrow A(t)$  (**specializzazione**);
- $A \Rightarrow \forall x A$  (**generalizzazione**);
- $(A(x) \wedge x = t) \Rightarrow A(t)$ , se tutte le occorrenze libere di  $t$  rimangono libere in  $A(t)$  (**sostituzione**).

## Riepilogando

La logica dei predicati permette di analizzare gli elementi di cui la proposizione è composta.

Essa è quindi uno strumento più potente (e più complesso) della logica proposizionale.

Alcune semplici inferenze espresse nella logica dei predicati possono essere dimostrate senza ricorrere ad una dimostrazione formale.

## Predicati ed insiemi

Esiste una corrispondenza tra i predicati e gli insiemi:

- i predicati definiscono insiemi;
  - esempio: gli elementi,  $x$ , per cui il predicato  $architetto(x)$  è vero, costituiscono l'insieme degli architetti;
- la disgiunzione definisce un'unione;
  - esempio: gli elementi,  $x$ , che rendono vero il predicato  $architetto(x) \vee ingegnere(x)$ , costituiscono l'insieme delle persone che sono architetto o ingegnere (o entrambi);
- la congiunzione definisce un'intersezione;
  - esempio: gli elementi,  $x$ , che rendono vero il predicato  $architetto(x) \wedge biondo(x)$ , costituiscono l'insieme delle persone che sono architetto e che sono bionde.



## Dimostrazioni grafiche

Sfruttando la corrispondenza tra formule di logica posizionale e insiemi, è possibile effettuare o confutare la validità di inferenze con il solo supporto dei grafici di Eulero-Venn.

In particolare:

- le costanti e le variabili sono punti del piano;
- i predicati sono regioni del piano;
- le operazioni logiche combinano le regioni del piano come nei diagrammi di Eulero-Venn.

Un'inferenza sarà valida se il grafico delle assunzioni descrive una situazione compatibile con la tesi, ma non con la sua negazione.

## Esempio 1

**Ip1:** Gli uomini sono mortali.

**Ip2:** Socrate è un uomo.

**Tesi:** Socrate è mortale.

**Ip1:**  $\forall x(U(x) \rightarrow M(x))$

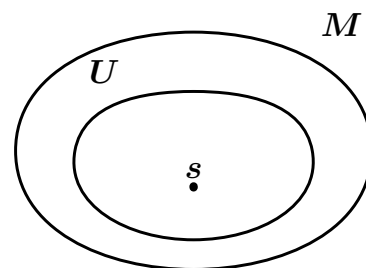
**Ip2:**  $U(s)$

**Tesi:**  $M(s)$

**Ip1:**  $U \subseteq M$

**Ip2:**  $s \in U$

**Tesi:**  $s \in M$



## Esempio 2

**Ip1:** Tutte le api ronzano.

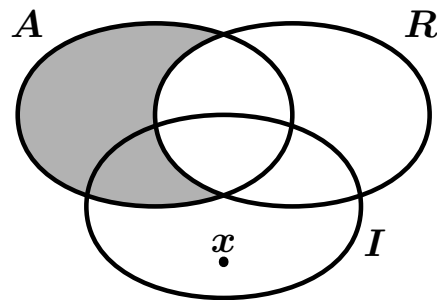
**Ip2:** Qualche insetto non ronzano.

**Tesi:** Qualche insetto non è un'ape.

**Ip1:**  $\forall x (A(x) \rightarrow R(x))$

**Ip2:**  $\exists x (I(x) \wedge \neg R(x))$

**Tesi:**  $\exists x (I(x) \wedge \neg A(x))$



**Ip1:**  $A \subseteq R$

**Ip2:**  $\exists x \in I - R$

**Tesi:**  $\exists x \in I - A$

## Soluzione dell'indovinello

$\exists x (\neg \text{freddo}(y) \wedge \text{piace}(x, y)):$

- A qualcuno piace caldo (Some like it hot, 1959)