

**19.01.2008 — Soluzione del secondo compito — versione A**valutazioni **1** (4) _____ **2** (4) _____ **3** (4) _____ **4** (6) _____ **5** (6) _____ **6** (8) _____**Cognome** _____**Nome** _____**Matricola** _____ **Firma** _____**Esercizio 1**Siano dati i linguaggi L_1 e L_2 :

- $L_1 = \{x, y\}$
- $L_2 = \{c, y, cy\}$

Descrivere i linguaggi:

- a) $L_3 = L_1 \cap L_2$
- b) $L_4 = L_1 \cup L_2$
- c) $L_5 = L_1 L_2$
- d) $L_6 = L_1^3$
- e) $L_7 = L_2^* L_1^*$
- f) $L_8 = (L_1 L_2)^*$

Per quegli insiemi di cui sia troppo lungo (o impossibile) dare una descrizione estensionale, elencare almeno tre elementi, indicando le caratteristiche degli elementi che li compongono. In particolare, chiarire se la stringa vuota ϵ appartiene al linguaggio.

Soluzione

- a) $L_3 = L_1 \cap L_2 = \{y\}$
- b) $L_4 = L_1 \cup L_2 = \{c, cy, x, y\}$
Gli elementi comuni non devono essere ripetuti.
- c) $L_5 = L_1 L_2 = \{xc, xcy, xy, yc, ycy, yy\}$
- d) $L_6 = L_1^3 = \{xxx, xxy, xyx, xyy, yxx, yxy, yyx, yyy\}$
- e) $L_7 = L_2^* L_1^*$
L'insieme L_7 è dato dalle stringhe formate come concatenazione di un numero arbitrario (eventualmente nullo) di elementi di L_2 seguito da una concatenazione di un numero arbitrario

(eventualmente nullo) di elementi di L_1 . Poiché sia L_1^* che L_2^* sono composti da infiniti elementi, anche L_7 avrà infiniti elementi. L'insieme $\{\epsilon, xxyy, cyyy, cyyx\}$ è un sottoinsieme di L_7 .

- f) $L_8 = (L_1 L_2)^*$

L'insieme L_8 è formato dalla concatenazione di un numero arbitrario (eventualmente nullo) di stringhe composte da un elemento di L_1 e da un elemento di L_2 . Pertanto, L_8 è composto da infiniti elementi. L'insieme $\{\epsilon, xc, xcyxyc\}$ è un sottoinsieme di L_8 .

Esercizio 2

Sia data la seguente grammatica, $G = \langle T, V, P, S \rangle$, definita su $\Sigma = \{a, b, c, d\}$:

- insieme dei simboli terminali, T : $T = \Sigma$
- insieme dei metasimboli, V : $V = \{K, H\}$
- insieme delle regole di produzione, P : $P = \{S ::= K, K ::= d|aH|bH, H ::= a|bK|cH\}$

Quali fra le seguenti stringhe vengono generate da G ?

- a) $abbcbb$
- b) $abaca$
- c) $bcaac$
- d) $abbd$
- e) $bccbd$

Riportare la successione di regole da applicare per la generazione di tali stringhe e le stringhe parziali ottenute, spiegando perché non si possono ottenere le stringhe che eventualmente non risultassero appartenere al linguaggio generato da G .

Soluzione

a)

$abbc b$	S
$S ::= K$	K
$K ::= aH$	aH
$H ::= bK$	abK
$K ::= bH$	$abbH$
$H ::= cH$	$abbcH$
$H ::= bK$	$abbc bK$

Non è possibile eliminare il metasimbolo K senza aggiungere un altro simbolo.

La stringa $abbc b$ non è generata da G : $abbc b \notin \mathcal{L}(G)$.

b)

$abaca$	S
$S ::= K$	K
$K ::= aH$	aH
$H ::= bK$	abK
$K ::= aH$	$abaH$
$H ::= cH$	$abacH$
$H ::= a$	$abaca$

La stringa $abaca$ è generata da G : $abaca \in \mathcal{L}(G)$.

c)

$bcaac$	S
$S ::= K$	K
$K ::= bH$	bH
$H ::= cH$	bcH
$H ::= a$	bca

La stringa generata non coincide con la stringa data, $bcaac$, e non può essere ulteriormente estesa, per mancanza di metasimboli.

La stringa $bcaac$ non è generata da G : $bcaac \notin \mathcal{L}(G)$.

d)

$abbd$	S
$S ::= K$	K
$K ::= aH$	aH
$H ::= bK$	abK
$K ::= bH$	$abbH$

Non esiste regola che permetta di ottenere il simbolo d dal metasimbolo H .

La stringa $abbd$ non è generata da G : $abbd \notin \mathcal{L}(G)$.

e)

$bccbd$	S
$S ::= K$	K
$K ::= bH$	bH
$H ::= cH$	bcH
$H ::= cH$	$bccH$
$H ::= bK$	$bccbK$
$K ::= d$	$bccbd$

La stringa $bccbd$ è generata da G : $bccbd \in \mathcal{L}(G)$.

Esercizio 3

Sia dato il seguente automa a stati finiti, A , $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$:

- insieme degli stati, Q : $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- alfabeto di input, Σ : $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$

funzione di transizione δ :

	a	b	c	d	e
q_0	q_2	q_0	q_1	q_0	q_3
q_1	q_2	q_1	q_0	q_3	q_2
q_2	q_2	q_2	q_2	q_1	q_1
q_3	q_1	q_3	q_1	q_1	q_1

- stato iniziale, q_0
- insieme di stati finali, F : $F = \{q_1\}$

Indicare:

- quattro stringhe accettate da A
- quattro stringhe rifiutate da A

Soluzione

- quattro stringhe accettate da A

- $acbd$
- $cadde$
- $aacd$
- $edbcc$

- quattro stringhe rifiutate da A

- $badd$
- $cabee$
- $aeddc$
- baa

Esercizio 4

Modellare, tramite un automa a stati finiti deterministico, il comportamento di un aereo da turismo.

L'aereo è caratterizzato dalla sua posizione rispetto al terreno, dalla sua velocità e del suo assetto. Per semplicità, ipotizzare che l'aereo possa posizionarsi solo su quattro quote: a terra (0 m), a 100 m, a 200 m e a 300 m. Se l'aereo è in assetto di volo, può spostarsi liberamente ad ogni quota. Tale assetto può essere mantenuto solo se l'aereo viaggia ad una certa velocità. Per semplicità, ipotizzare che i motori dell'aereo possano essere solo spenti o accesi. Quando il motore è spento, l'aereo perde quota e mantiene l'assetto di volo solo fino alla quota immediatamente inferiore. Dopodiché, l'aereo entra in stallo e precipita. A motore acceso, l'aereo mantiene la quota alla quale si trova e acquista (o mantiene) l'assetto di volo.

L'aereo atterra correttamente se raggiunge quota 0 m con il motore spento e l'assetto di volo.

Ipotizzare che non si possano verificare contemporaneamente più azioni e che le azioni abbiano effetto immediato. Modellare l'automa in modo che esso accetti solo le stringhe che descrivono il normale (e sicuro) comportamento dell'aereo. In particolare, individuare possibili situazioni fisicamente irrealizzabili o pericolose e formalizzarle in modo che l'automa rifiuti le successioni di azioni che porterebbero il aereo in tali situazioni.

Stati e simboli riportati o suggeriti nel testo sono solo indicativi: possono essere modificati, ridotti ed estesi a secondo delle esigenze del progetto.

Soluzione

L'automa deve modellare un sistema fisico. L'insieme dei simboli di input modella quindi gli stimoli che il sistema riceve dall'esterno (o le azioni che esso subisce) e gli stati descrivono le situazioni in cui il sistema viene a trovarsi.

Questo permette di vedere l'automa come un simulatore del sistema in esame: l'automa deve accettare le stringhe che rappresentano le sequenze di stimoli (o azioni) fisicamente realizzabili oppure quelle che rappresentano una sequenza di eventi di particolare interesse.

L'aereo che deve essere descritto dall'automa è caratterizzato dalla posizione rispetto al suolo, dalla velocità e dall'assetto di volo. In particolare, l'aereo può trovarsi solo a quattro quote e si suppone che il transito tra una quota e l'altra avvenga istantaneamente. Inoltre, la velocità alla quale l'aereo viaggia dipende dal motore che può essere solo in funzione o spento. Allo spegnimento del motore, l'aereo scende di quota e mantiene un assetto temporaneamente sicuro; se il motore non viene riattivato, però l'aereo precipita. Si possono quindi individuare tre assetti: volo, planata e caduta. Qualsiasi sia l'assetto in cui si trova, alla riaccensione del motore l'aereo torna nell'assetto di volo.

Quindi, gli stati dell'aereo derivano dalla combinazione degli stati relativi all'assetto, al motore e alla quota di volo. Gli stati verranno indicati con una terna di simboli:

- assetto: v, p, c , (per volo, planata, caduta);
- motore: a, s , (per acceso, spento);
- quota: $0, 1, 2, 3$ (per 0 m, 100 m, 200 m, 300 m).

Per esempio, lo stato $va3$ indicherà che l'aereo è in assetto di volo, con il motore acceso e viaggia a quota 300 m.

Le possibili combinazioni di questi simboli sono 24 ($3 \times 2 \times 4$), ma alcune indicano degli stati impossibili:

- quando il motore è acceso, non è possibile che l'aereo abbia un assetto diverso da quello di volo;

- quando il motore è spento, non è possibile che l'aereo sia in assetto di volo;
- quando l'aereo è a quota 300 m, il motore deve essere acceso.

Le specifiche indicano che l'aereo a terra (quota 0 m) con motore spento e in assetto di volo (e quindi anche di planata) va considerato atterrato (e fermo). Quindi gli stati $ps0$ e $vs0$ sono coincidenti.

Lo stato $cs0$ indica che l'aereo ha raggiunto terra in caduta, situazione pericolosa e irreversibile: per meglio rimarcare il significato, lo stato $cs0$ sarà chiamato *err*, e una volta raggiunto non potrà più essere lasciato.

Con queste considerazioni l'insieme degli stati, Q , è:

$$Q = \{vs0, va0, va1, va2, va3, ps1, ps2, cs1, cs2, err\}$$

Le azioni che possono essere compiute sull'aereo sono:

- accendere e spegnere il motore,
- salire o scendere di quota.

Inoltre, al fine di modellare la situazione in cui l'aereo passa dalla planata alla caduta, si può aggiungere un evento che sta a rappresentare il trascorrere del tempo. In particolare, tale evento indicherà una quantità di tempo sufficiente per far perdere all'aereo l'assetto di planata e durante il quale il motore non viene riacceso.

L'alfabeto, Σ , sarà quindi: $\Sigma = \{a, s, u, d, t\}$. I simboli a e s indicheranno l'accensione e lo spegnimento del motore, i simboli u e d indicheranno le manovre per salire e scendere di quota (up e down), mentre t indicherà il trascorrere del tempo senza nessun evento dei precedenti.

Le specifiche non chiariscono cosa succeda se si cerca di accendere (o spegnere) il motore quando questo sia già acceso (o spento). Si può ipotizzare che questa azione non abbia conseguenze. Allo stesso modo, si può ipotizzare che il tentativo di salire sopra quota 300 m o scendere sotto quota 0 m non abbia effetto.

Analogamente, il tentativo di far salire di quota l'aereo a motore spento non cambierà lo stato dell'automa.

Inoltre, le specifiche non chiariscono cosa succede se si cerca di far abbassare l'aereo a motore spento. Si può ipotizzare che questa manovra porti l'aereo alla quota immediatamente inferiore e in assetto di caduta.

Ogni sequenza di azioni che non comporti il raggiungimento dello stato *err* rappresenta il normale funzionamento dell'aereo. Pertanto, qualsiasi sequenza di simboli che non porti nello stato *err* deve venire accettata, e, quindi, tutti gli stati tranne *err* compongono l'insieme degli stati finali, F .

Si può ipotizzare che lo stato iniziale sia quello relativo all'aereo a terra a motore spento e in assetto di volo: $vs0$.

Con le ipotesi fatte, dovrebbero essere accettate, per esempio, le seguenti sequenze di azioni: $auusauudst$, $ududud$, $auuuuuuuddddds$. Al contrario, verrebbero rifiutate, tra le altre, le seguenti sequenze di azioni: $auust$, $auuustttta$. Va notato che aggiungendo un qualsiasi suffisso ad una stringa rifiutata, si ottiene sempre una stringa rifiutata: se una certa sequenza di azioni porta in uno stato non accettabile, qualsiasi sequenza di azioni ad essa successiva non può renderla accettabile.

La tabella delle transizioni, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ può essere quella riportata in Tabella 1.

Da notare che avendo scelto di far coincidere $ps0$ con $vs0$, spegnere il motor a quota 100 m non fa perdere l'assetto di volo. È possibile estendere l'automa in modo da differenziare le due situazioni: in tal caso, spegnere il motore nello stato $va1$ farà transitare l'automa nello stato $ps0$ e solo dopo un periodo di tempo (t) l'aereo fermerà la sua corsa rientrando nello stato $vs0$.

Le specifiche rendono possibili diverse semplificazioni. Tra queste, quella in cui l'assetto non possa più essere recuperato una volta perduto. In tal caso, l'assetto di planata non avrebbe più senso.

Esercizio 5

Sia data l'espressione regolare E , definita su $\Sigma = \{a, b, c\}$:

$$\bullet E = (c^*a + ab)^2(b^2 + c^*b)^*$$

Individuare, motivando le risposte, quali fra le seguenti stringhe vengono descritte da E :

- a) $bacca$
- b) $ababacbb$
- c) $ccaabccb$
- d) $aabbbb$
- e) $accca$
- f) $abcabbccb$

Soluzione

Le espressioni regolari denotano degli insiemi di stringhe. In tal senso, possiamo applicare l'operatore di relazione insiemistica $\subseteq$ alle espressioni regolari per indicare che l'insieme denotato da un'espressione contiene l'insieme denotato da una seconda espressione regolare. Per esempio, $E_1 \subseteq E_2$ significa che tutte le stringhe descritte da E_1 sono descritte anche da E_2 .

Ricordando che l'espressione regolare s descrive l'insieme di stringhe composto dalla sola s , $\{s\}$, si può dimostrare che tale stringa viene descritta da

un'espressione regolare E derivando una catena di inclusioni del tipo $s \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_k \equiv E$.

Osserviamo innanzitutto l'espressione regolare E è la concatenazione di due sottoespressioni: $E_1 = (c^*a + ab)^2$ e $E_2 = (b^2 + c^*b)^*$. Quindi, le stringhe descritte da E dovranno obbligatoriamente avere un prefisso descritto da E_1 eventualmente seguito da un suffisso descritto da E_2 (poiché E_2 descrive anche la stringa vuota). Questa premessa semplificherà la spiegazione delle soluzioni di seguito riportate.

a) $bacca$

Nessuna stringa descritta da E_1 può aver b come primo simbolo, e, pertanto, neanche E può descrivere una stringa che inizi per b .

La stringa $bacca$ non viene descritta da E : $bacca \notin \mathcal{L}(E)$.

b) $ababacbb$

Tutti i simboli a presenti nelle stringhe descritte da E sono descritti nella sottoespressione E_1 , e possono essere esattamente 2 (corrispondenti, in alternativa ad una occorrenza di c^*a oppure ab). Nella stringa considerata sono presenti 3 simboli a .

La stringa $ababacbb$ non viene descritta da E : $ababacbb \notin \mathcal{L}(E)$.

c) $ccaabccb$

$$\begin{aligned} ccaabccb &= (c^2)(a)(ab)(c^2)(b) \subseteq \\ (c^*)(a)(ab)(c^*)(b) &= (c^*a)(ab)(c^*b) \subseteq \\ (c^*a + ab)^2(b^2 + c^*b)^* &\subseteq (c^*a + ab)^2(b^2 + c^*b)^* \end{aligned}$$

La stringa $ccaabccb$ viene descritta da E : $ccaabccb \in \mathcal{L}(E)$.

d) $aabbbb$

$$\begin{aligned} aabbbb &= (a)(ab)(b^2) \subseteq (c^*a)(ab)(b^2) \subseteq (c^*a + \\ ab)^2(b^2) &\subseteq (c^*a + ab)^2(b^2 + c^*b) \subseteq (c^*a + \\ ab)^2(b^2 + c^*b)^* \end{aligned}$$

La stringa $aabbbb$ viene descritta da E : $aabbbb \in \mathcal{L}(E)$.

e) $accca$

$$\begin{aligned} accca &= (a)(c^3)(a) \subseteq (c^*a)(c^*)(a) \subseteq (c^*a + \\ ab)(c^*a + ab) &= (c^*a + ab)^2 \subseteq (c^*a + ab)^2(b^2 + \\ c^*b)^* \end{aligned}$$

La stringa $accca$ viene descritta da E : $accca \in \mathcal{L}(E)$.

f) $abcabbccb$

$$abcabbccb \subseteq (c^*a + ab)^2(b^2 + c^*b)^*$$

La stringa $abcabbccb$ viene descritta da E : $abcabbccb \in \mathcal{L}(E)$.

Esercizio 6

Indicare una espressione regolare (non banale) definita su $\Sigma = \{a, b, c\}$ che descriva le seguenti stringhe:

δ	a	s	u	d	t
$vs0$	$va0$	$vs0$	$vs0$	$vs0$	$vs0$
$va0$	$va0$	$vs0$	$va1$	$va0$	$va0$
$va1$	$va1$	$vs0$	$va2$	$va0$	$va1$
$va2$	$va2$	$ps1$	$va3$	$va1$	$va2$
$va3$	$va3$	$ps2$	$va3$	$va2$	$va3$
$ps1$	$va1$	$ps1$	$ps1$	err	err
$ps2$	$va2$	$ps2$	$ps2$	$cs1$	$cs1$
$cs1$	$va1$	$cs1$	$cs1$	err	err
$cs2$	$va2$	$cs2$	$cs2$	$cs1$	$cs1$
err	err	err	err	err	err

Tabella 1: Tabella delle transizioni dell'automa dell'esercizio 4.

- $ccacc$
- $cacbbc$
- $babba$
- $abbaacbc$

ma non le seguenti:

- $ccbac$
- $babcc$
- $cbaabb$
- $abbacba$

poiché l'espressione regolare proposta è costituita dalla concatenazione di due chiusure, è necessario verificare che la prima sottoespressione non descriva le tre stringhe da escludere che non sono state prima considerate (in quanto potenzialmente escluse dalla seconda sottoespressione).

Altre espressioni regolari che rispettano le specifiche:

- $(b^*a + c^*a)^*(cb^*)^*$
- $(c + b^*a)2(a + cb^*c)^*$
- $(a^*c + b^*c)^* + (b^*a + acb)^*c^*$

Soluzione

Si può notare la presenza di simboli c nel suffisso di tre delle quattro stringhe da includere: $ccacc$, $cacbbc$, e $abbaacbc$. In particolare, le ultime due occorrenze del simbolo c sono inframezzate da una sequenza, eventualmente nulla di b . Queste stringhe possono essere descritte da una espressione regolare che abbia per suffisso cb^*c . Per descrivere anche la quarta stringa, si può considerare l'espressione regolare $(cb^*c)^*$ come suffisso per l'espressione regolare che descriva le quattro stringhe da includere. Tra le sottostringhe da escludere, l'unica che ha un suffisso che potrebbe essere descritto da cb^*c è la stringa $babcc$. Una espressione regolare in grado di descrivere i prefissi delle stringhe da includere ($ccacc$, $cacbbc$, $babba$ e $abbaacbc$, e di escludere quello di $babcc$, potrebbe, concatenato con l'espressione regolare $(cb^*c)^*$ essere la soluzione al problema. Le prime due stringhe da includere sono descrivibili come una sequenza di c seguite da un simbolo a , mentre la terza è descrivibile come la ripetizione di una sequenza di b seguita da a . Se si considera anche la stringa vuota come sequenza di lunghezza nulla, anche la quarta stringa rientrerebbe in questa descrizione. Pertanto, l'espressione regolare $(b^*a + c^*a)^*$ descriverebbe queste stringhe, ma non il prefisso di $babcc$, in quanto a questa sottostringa presenta l'ultimo simbolo b senza essere seguito da a . L'espressione regolare $(b^*a + c^*a)^*(cb^*c)^*$ descrive quindi le stringhe da includere, ma senza descrivere le stringhe da escludere. Va sottolineato che