Fondamenti di Informatica

per la Sicurezza

a.a. 2006/07

Rappresentazione binaria

Stefano Ferrari

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE

Citazione

Ci sono 10 tipi di persone,
chi capisce il binario
e chi no.

[Anonimo]

Numeri naturali

È il tipo più naturale da rappresentare: rappresentazione in notazione posizionale in base due.

Esempio: $(13)_{10} = (1101)_2 \longrightarrow 00001101$, usando un byte.

Il primo bit viene chiamato bit più significativo (Most Significant Bit, MSB).

L'ultimo bit viene chiamato bit meno significativo (Least Significant Bit, LSB).

MSB 00001101 LSB

Numeri interi con segno

Con bit di segno (rappresentazione segno e modulo):

0	0	0	+0
0	0	1	+1
0	1	0	+2
0	1	1	+3
1	0	0	-0
1	0	1	-1
1	1	0	-2
1	1	1	-3

- il bit più significativo rappresenta il segno, gli altri bit rappresentano il modulo;
- lo stesso numero (lo zero) viene rappresentato con due numerali differenti;
- le operazioni aritmetiche sono macchinose.

Complemento a 2 (1)

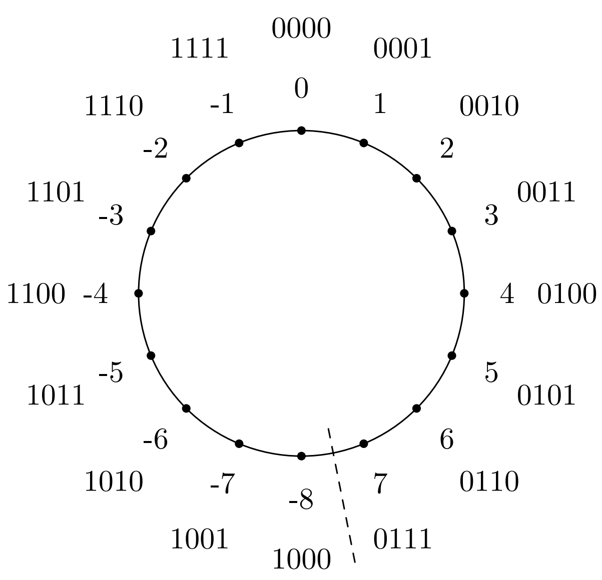
Per rappresentare in complemento a 2 il numero x usando una sequenza di n bit, si rappresenta in binario (usando $n+1$ bit) il numero $2^n + x$, e scartando poi il bit più significativo.

Esempio

Usando 4 bit ($n = 4$):

- $\mathbf{6 \longrightarrow 2^4 + 6 = (22)_{10} = (10110)_2 \xrightarrow{\text{compl. a 2}} 0110}$
- $\mathbf{-6 \longrightarrow 2^4 - 6 = (10)_{10} = (01010)_2 \xrightarrow{\text{compl. a 2}} 1010}$

Complemento a 2 (2)



Complemento a 2 (3)

Questa codifica equivale ad una rappresentazione posizionale modificata:

$$-a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

Esempio

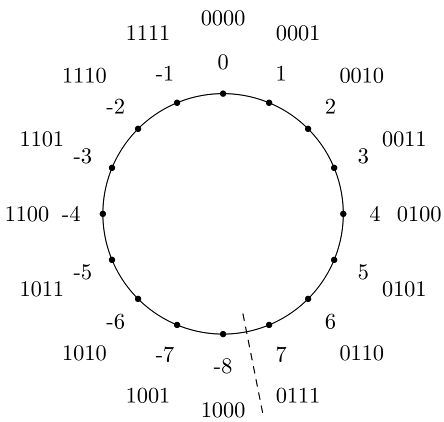
$1010 \ = -8 + 2 \ = -6$

Complemento a 2 (4)

Con questa rappresentazione:

- lo zero ha rappresentazione unica;
- con n bit, si rappresentano i numeri interi dell'intervallo $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$;
- i numeri negativi hanno il MSB che vale 1, gli altri 0 (di fatto, il MSB è il bit di segno);
- la somma si realizza considerando le sequenze di bit come numeri binari;
- la sottrazione si realizza invertendo il valore del sottraendo e poi sommandolo al minuendo in notazione binaria.

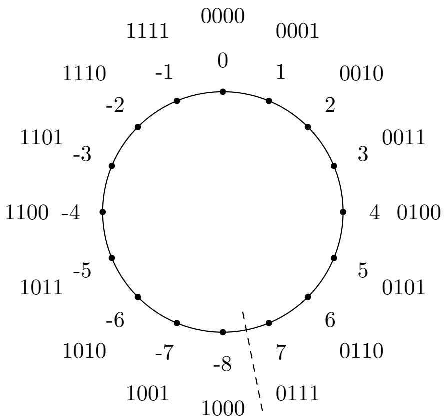
Decodifica in complemento a due



Decodifica:

- se il primo simbolo è 0 si considera semplicemente come un numero binario;
- se il primo simbolo è 1 lo si decodifica in binario e ad esso si sottrae il numero 2^n.

Inversione in complemento a 2

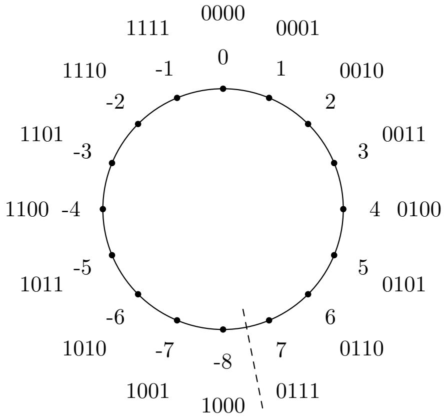


Inversione:

- si invertono tutte le singole cifre binarie;
- si somma 1.

L'inversione di -2^{n-1} dà un errore (overflow).

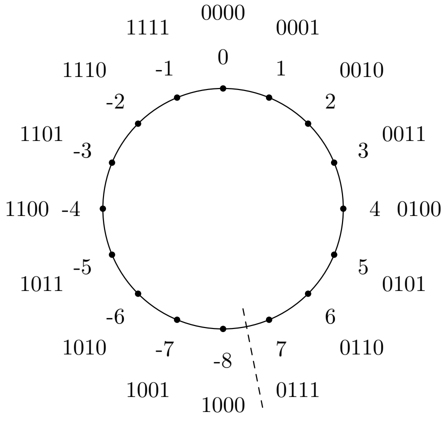
Codifica in complemento a 2



Codifica:

- codifica del valore assoluto in notazione posizionale binaria;
- se è negativo, lo si inverte.

Operazioni algebriche in complemento a 2



Somma:

- normale somma binaria.

Sottrazione:

- si inverte il sottraendo;
- lo si somma al minuendo.

Overflow

L'overflow si manifesta quando si cerca di rappresentare un numero troppo grande.

Esempio

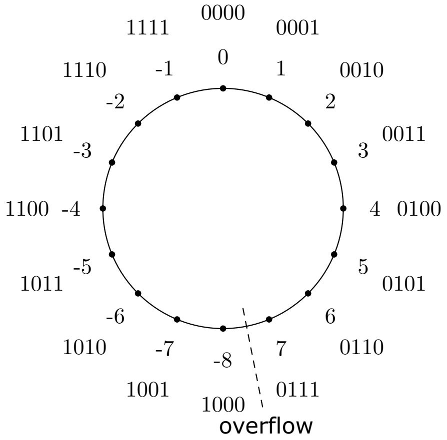
Usiamo una rappresentazione in complemento a 2 a 4 bit per i numeri da -8 a 7.

Il risultato della somma 6+5 non è rappresentabile.

Analoghe considerazioni per il risultato di -7-4.

Con la notazione in complemento a 2, l'overflow si rileva facilmente.

Individuazione dell'overflow



Overflow:

- somma di valori con segno opposto e sottrazione di valori con segni concordi non dà mai overflow;
- negli altri casi, c'è stato overflow se il segno del risultato è discorde con il segno del primo operando.

Overflow in complemento a 2

Si verifica un overflow se:

C = A + B

A	B	C
+	+	-
-	-	+

C = A - B

A	B	C
+	-	-
-	+	+

L'overflow nell'inversione di -2^{n-1} non deve essere considerato nel calcolo di una sottrazione (quando -2^{n-1} è il sottraendo).

Codifica (1)

D Codificare il numero 2 in complemento a 2 a 4 bit, specificando se si verifica un overflow.

R Poiché $2 \leq 2^{4-1} - 1$, non ci sarà overflow.

Numero da codificare: $2^4 + 2 = 18$.

Codifica binaria troncata a 4 bit: 0010.

Codifica (2)

D Codificare il numero 10 in complemento a 2 a 3 bit, specificando se si verifica un overflow.

R Poiché $10 > 2^{3-1} - 1$, ci sarà overflow.

- Numero da codificare: $2^3 + 10 = 18$

  Codifica binaria troncata a 3 bit: 010

Codifica (3)

D Codificare il numero -13 in complemento a 2 a 3 bit, specificando se si verifica un overflow.

R Poiché $-13 < -2^{3-1}$, ci sarà overflow.

Numero da codificare: $2^3 - 13 = -5$.

Codifica binaria troncata a 3 bit del valore assoluto (5): 101.

Inversione in complemento a 2: 011.

Decodifica (1)

D Quale numero è rappresentato dalla stringa binaria 10111, codificata in complemento a due?

R $(10111)_2 = (23)_{10}$.

Poiché la prima cifra binaria è 1, 10111 viene decodificato come: $23 - 2^5 = -9$.

Decodifica (2)

D Quale numero è rappresentato dalla stringa binaria 01101, codificata in complemento a due?

R $(01101)_2 = (13)_{10}$.

Poiché la prima cifra binaria è 0, 01101 viene decodificato come 13.

Inversione (1)

D Quale stringa binaria è l'inverso in complemento a due della stringa binaria 01101?

R Invertendo i bit di 01101, si ottiene 10010.

Sommando 1 a 10010, si ottiene 10011.

Troncando a 5 bit 10011, si ottiene 10011.

Inversione (2)

D Quale stringa binaria è l'inverso in complemento a due della stringa binaria 00?

R Invertendo i bit di 00, si ottiene 11.

Sommando 1 a 11, si ottiene 100.

Troncando a 2 bit 100, si ottiene 00.

Somma (1)

D Date le stringhe binarie A = 0000 e B = 0011, calcolare in complemento a due la loro somma, specificando se si verifica un overflow.

R La somma binaria di 0000 e 0011, troncata a 4 bit è 0011.

Poiché le due stringhe date hanno il primo bit uguale, e uguale anche al primo bit del risultato, non si è verificato un overflow.

Somma (2)

D Date le stringhe binarie A = 111101 e B = 100001, calcolare in complemento a due la loro somma, specificando se si verifica un overflow.

R La somma binaria di 111101 e 100001, troncata a 6 bit è 011110.

Poiché le due stringhe date hanno il primo bit uguale, ma diverso dal primo bit del risultato, si è verificato un overflow.

Sottrazione (1)

D Date le stringhe binarie A = 1011000 e B = 0101000, calcolare in complemento a due la loro differenza, specificando se si verifica un overflow.

R Il complemento a 2 di 0101000 è 1011000.

La somma binaria di 1011000 e 1011000, troncata a 7 bit è 0110000.

Poiché le due stringhe date hanno il primo bit diverso, e il primo bit del risultato è uguale al primo bit della seconda stringa, si è verificato un overflow.

Sottrazione (2)

D Date le stringhe binarie A = 100011 e B = 110000, calcolare in complemento a due la loro differenza, specificando se si verifica un overflow.

R Il complemento a 2 di 110000 è 010000.

La somma binaria di 100011 e 010000, troncata a 6 bit è 110011.

Poiché le due stringhe date hanno il primo bit uguale, non si è verificato un overflow.

Numeri "con la virgola"

Per la rappresentazione dei numeri razionali e reali ci sono due impedimenti:

- per via della notazione posizionale, alcuni numeri non possono essere rappresentati con un numero limitato di cifre (e.g., $\frac{1}{3}$ in base 10);
- alcuni numeri reali (gli irrazionali) non possono proprio essere rappresentati in nessuna base (e.g., π).

Numeri razionali

Per gli usi pratici, i numeri irrazionali possono essere approssimati da un numero razionale:

- per esempio, $3.14 \approx \pi$.

Per rappresentare numeri razionali ci sono due notazioni, dette:

- virgola fissa;
- virgola mobile.

Virgola fissa (1)

Data una sequenza di n bit, viene stabilito a priori quanti di questi, m rappresenteranno la parte intera, e quanti, k, la parte frazionaria.

$$\underbrace{\overbrace{a_{n-1}\cdots a_k}^{m\text{ bit}} \,.\, \overbrace{a_{k-1}\cdots a_0}^{k\text{ bit}}}_{n\text{ bit}}$$

Equivale a dividere per 2^k.

Virgola fissa (2)

Esempio:

$(10.101)_2 = 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} = 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0.5 + 0\cdot 0.25 + 1\cdot 0.125 = 2.625$

$(10101)_2/2^3 = (1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1)/8 = 21/8 = 2.625$

Virgola fissa (3)

In virgola fissa, la precisione assoluta è fissata:

1	0	3	0.	2	7	e	0	0	0	1.	0	9

hanno la stessa precisione: 1/100.

Per il primo numero, la precisione relativa è $1/10^6$, mentre per il secondo numero, la precisione relativa è $1/10^2$.

1.091 e 1.094 sono indistinguibili: vengono rappresentati con 1.09.

Virgola fissa (4)

Problema di underflow: può non essere possibile rappresentare un numero piccolo.

Come si rappresenta 0.001?

0	0	0	0.	0	0	!

Virgola mobile (1)

Un numero razionale può essere rappresentato nella forma: $m \cdot b^e$, b è una base intera.

Esempio

32.1 può essere scritto come $0.321 \cdot 10^2$.

m è detto mantissa, e è detto esponente.

In virgola mobile, un numero viene rappresentato tramite la coppia mantissa-esponente.

Virgola mobile (2)

In virgola mobile, la precisione relativa è fissata.

Il numero di bit dedicati a:

- m fissano la precisione relativa con cui il numero può essere rappresentato;
- e fissano l'estensione dell'intervallo rappresentabile.

IEEE Standard 754 Floating Point Numbers:

- singola precisione: 32 bit (1 per il segno, 8 per l'esponente e 23 per la mantissa);
- doppia precisione: 64 bit (1 per il segno, 11 per l'esponente e 52 per la mantissa).

Fissa o mobile?

Con lo stesso budget di bit, possiamo rappresentare lo stesso numero di valori.

Virgola fissa e mobile si differenziano per:

- distribuzione dei valori rappresentabili sulla retta dei reali;
- proprietà aritmetiche (e.g., l'ordine con cui si eseguono le operazioni è importante in virgola mobile);
- precisione (e.g., l'uso della virgola mobile per calcoli finanziari è pericoloso);
- costo computazionale.