Fondamenti di Informatica

per la Sicurezza

a.a. 2006/07

Grammatiche

Stefano Ferrari

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE

Alfabeto

Un alfabeto è un insieme finito e non vuoto di simboli.

Esempi:

- $A = \{a, b, c\}$
- $A = \{0, 1\}$

Stringa

Una stringa (o parola) è una sequenza finita di simboli.

Esempio:

- se $A = \{a, b, c\}$, $aaabacab$ è una stringa su A.

La lunghezza di una stringa w, denotata con $|w|$, è il numero di simboli che la compongono.

Esempio:

- $|aaabacab| = 8$

La stringa vuota ϵ è composta da zero simboli:

$$|\epsilon| = 0$$

Sottostringhe

Sia $w = a_1 \cdots a_n$:

- $a_1 \cdots a_j$, con $j \in \{1, \ldots, n\}$ è un prefisso di w;
- $a_j \cdots a_n$, con $j \in \{1, \ldots, n\}$ è un suffisso di w;
- $a_i \cdots a_j$, con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ è una sottostringa di w;
- ϵ è prefisso, suffisso e sottostringa di w.

Concatenazione

La concatenazione di v e w è vw:

- la concatenazione è un'operazione associativa;
- ϵ ne è l'elemento neutro.

La concatenazione si estende agli alfabeti.

Per esempio, se $A = \{a, b, c\}$:

- $A^0 = \{\epsilon\}$
- $A^1 = \{a, b, c\}$
- $A^2 = \{aa, ab, ac, \ldots, cc\}$
- $A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \cdots = \cup_i A^i$ (chiusura di A)

Linguaggio

Un linguaggio (formale) L definito su un alfabeto A è un sottoinsieme di A^*.

Una frase di un linguaggio è una stringa appartenente al linguaggio stesso.

Esempi

Esempi:

- il linguaggio delle frasi in italiano:
  - alfabeto: $A = \{a, b, \ldots, z,$ <spazio>$\}$
  - stringhe su A: $cosa$, $il\,porto$, $ghsde\,afe\,li$
  - frasi: $la\,gatta\,corre$
- il linguaggio delle espressioni aritmetiche:
  - alfabeto: $A = \{0, \ldots, 9, +, -, :, \times, (,)\}$
  - stringhe su A: 980, $34 + 61$, $: ()345+)$
  - frasi: $(25 + 12) : 3$

Operazioni sui linguaggi (1)

Se L, L_1 e L_2 sono linguaggi su Σ, si possono definire le seguenti operazioni:

unione , $L_1 \cup L_2$:

- $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$
- $|L_1 \cup L_2| \leq |L_1| + |L_2|$

intersezione , $L_1 \cap L_2$:

- $L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2\}$
- $|L_1 \cap L_2| \leq \min(|L_1|, |L_2|)$

Operazioni sui linguaggi (2)

differenza , $L_1 - L_2$:

- $L_1 - L_2 = \{w \mid w \in L_1 \wedge w \notin L_2\}$
- $|L_1 - L_2| \leq |L_1|$

complemento , $\overline{L}$:

- $\Sigma^* - L$
- $|\overline{L}| \leq \infty$

Operazioni sui linguaggi (3)

concatenazione , $L_1 L_2$:

- $L_1 L_2 = \{vw \mid v \in L_1, w \in L_2\}$
- $|L_1 L_2| \leq |L_1| \cdot |L_2|$

potenza , L^n:

- $L^0 = \{\epsilon\}$
- $L^1 = L$
- $L^k = \{v_1 v_2 \ldots v_k \mid v_1, v_2, \ldots, v_k \in L\}$
- $|L^k| \leq |L|^k$

Operazioni sui linguaggi (4)

chiusura (di Kleene) , L^*:

- $L^* = \cup_i L^i$
- se $L = \{\epsilon\}$, $|L^*| = 1$
- altrimenti, $|L^*| = \infty$

chiusura positiva , L^+:

- $L^+ = \cup_i L^i$, $i > 0$
- $L^* = L^+ \cup \{\epsilon\}$
- $|L^+| = \infty$

Grammatica

Una grammatica (formale) definisce in modo rigoroso un linguaggio su un alfabeto, Σ.

Tecnicamente è una quadrupla $\langle \Sigma, V, P, S \rangle$:

- Σ, insieme finito di simboli terminali:
  - può anche includere la stringa vuota, ϵ ;
- V, insieme finito di simboli non terminali:
  - sono meta-simboli di appoggio ($V \cap \Sigma = \emptyset$);
  - rappresentano categorie sintattiche;
- P, insieme di regole di riscrittura del tipo $\alpha \rightarrow \beta$, con α, β stringhe su $\Sigma \cup V$, con $\alpha \neq \epsilon$;
- $S \in V$, simbolo iniziale, detto scopo.

Generazione del linguaggio

Per ottenere una frase del linguaggio:

1. si parte dallo scopo, S;
2. si applica una regola di produzione $\alpha \longrightarrow \beta$:
   (a) si cerca la presenza della sotto-sequenza α;
   (b) la si sostituisce con β;
   (c) α e β sono chiamate forme di frase;
3. si procede finché non si ottiene una stringa con soli simboli terminali.

Tutte le frasi del linguaggio si ottengono con questo procedimento.

Esempio

Grammatica: $\langle \Sigma, V, P, S \rangle$

- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $V = \{X\}$
- $P = \{X \longrightarrow 0,\ X \longrightarrow 1X,\ X \longrightarrow 0X\}$
- $S = X$

Linguaggio: $\{0, 10, \ldots, 0110, \ldots\}$

- $S = X \longrightarrow 0$
- $S = X \longrightarrow 1X \longrightarrow 10$
- $S = X \longrightarrow 0X \longrightarrow 01X \longrightarrow 011X \longrightarrow 0110$

Grammatiche BNF

La notazione BNF (Backus-Naur Form) è più conveniente per rappresentare le grammatiche:

- le regole di produzione sono della forma $\alpha ::= \beta$;
- i meta-simboli in V sono della forma $\langle nome \rangle$;
- il meta-simbolo speciale | (pipe) è usato per l'alternativa:
  - $\alpha ::= \beta_1$, $\alpha ::= \beta_2$, $\ldots$, $\alpha ::= \beta_n$;
  - $\alpha ::= \beta_1 | \beta_2 | \ldots | \beta_n$.

Su http://www.faqs.org/rfcs/rfc2234.html si trova la definizione di Augmented BNF (ABFN).

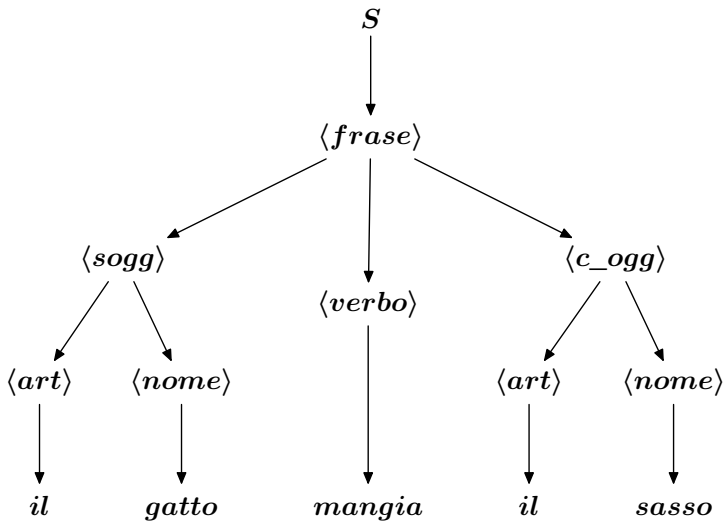
Esempio

Grammatica: $\langle \Sigma, V, P, S \rangle$

- $\Sigma = \{il, gatto, topo, sasso, mangia, beve\}$
- $V = \{\langle frase \rangle, \langle sogg \rangle, \langle art \rangle, \langle nome \rangle, \langle verbo \rangle, \langle c\_ogg \rangle\}$
- $P = \{$
  $\langle frase \rangle ::= \langle sogg \rangle \langle verbo \rangle \langle c\_ogg \rangle$
  $\langle sogg \rangle ::= \langle art \rangle \langle nome \rangle$
  $\langle art \rangle ::= il$
  $\langle nome \rangle ::= gatto | topo | sasso$
  $\langle verbo \rangle ::= mangia | beve$
  $\langle c\_ogg \rangle ::= \langle art \rangle \langle nome \rangle$ $\}$
- $S = \langle frase \rangle$

Albero sintattico

Esempio: *il gatto mangia il sasso*



Classificazione di Chomsky

È possibile caratterizzare le grammatiche sulla base della forma delle loro regole di produzione:

- Tipo 3 (regolari);
- Tipo 2 (context-free);
- Tipo 1 (context-sensitive);
- Tipo 0 (a struttura di frase).

Grammatiche di tipo 3

Le grammatiche regolari si dividono in:

- lineari a destra, $F ::= \alpha, F ::= \alpha G$;
- lineari a sinistra, $F ::= \alpha, F ::= G\alpha$;

con $F, G \in V$, $\alpha \in \Sigma^*$.

Esempi:

- $F ::= aG|a$, $G ::= bG|b|aF$
- $F ::= Fa|a$

Il linguaggio generato si dice di tipo 3 (o linguaggio regolare).

Grammatiche di tipo 2

Le grammatiche context-free (libere dal contesto) hanno produzioni della forma:

$F ::= \alpha$, con $F \in V$ e $\alpha \in (\Sigma \cup V)^*$.

Esempi:

- $F ::= aG|a$, $G ::= Gb|b|Fc$
- $F ::= aFc|b$

Si dice che il linguaggio è di tipo 2 (o linguaggio libero dal contesto).

Tipicamente, i linguaggi di programmazione appartengono a questo tipo.

Grammatiche di tipo 1

Le grammatiche context-sensitive (dipendenti dal contesto) hanno produzioni della forma:

- $\alpha F \beta ::= \alpha \gamma \beta$, $\quad \alpha, \beta, \gamma \in (\Sigma \cup V)^*, \gamma \neq \epsilon, F \in V$;
- $S ::= \epsilon$.

Note:

- α e β definiscono il "contesto" in cui la sostituzione $F ::= \gamma$ può avvenire;
- per una produzione della prima forma, la lunghezza della stringa generata non può diminuire.

Esempio: $\quad aFb ::= aFbGb$

Grammatiche di tipo 0

Le grammatiche di tipo 0 ammettono produzioni di qualsiasi forma:

- $\alpha ::= \beta$, con $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^*$.

Nota: sono ammesse anche produzioni che possono diminuire la lunghezza della stringa generata.

Gerarchia di grammatiche e linguaggi

Ogni grammatica di tipo n è anche una grammatica di tipo $n-1$.

Un linguaggio è di tipo n se esiste una grammatica di tipo n che lo genera, ma non nessuna di tipo $n+1$ è in grado di generarlo.

Esempi:

- linguaggio di tipo 3: $\{a^m b^n \mid m, n \geq 0\}$
- linguaggio di tipo 2: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- linguaggio di tipo 1: $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- linguaggio di tipo 0: $\{a^n \mid n$ è un numero primo$\}$

Grammatiche ambigue

Una grammatica si dice ambigua se qualche stringa del linguaggio da essa generato può essere generata mediante più alberi sintattici.

Esempio: con la regola $F ::= FaF|FbF|f$, la generazione della stringa $fafbf$ non è univoca.

Infatti:

- $F \rightarrow FaF \rightarrow faF \rightarrow faFbF \rightarrow fafbF \rightarrow fafbf$
- $F \rightarrow FbF \rightarrow Fbf \rightarrow FaFbf \rightarrow faFbf \rightarrow fafbf$

Un linguaggio si dice inerentemente ambiguo se non esiste alcuna grammatica non ambigua che lo generi.

Esercizio 1 (1)

Definiti i linguaggi:

- $L_1 = \{aa, ab, bc, c\}$
- $L_2 = \{1, 22, 31\}$

descrivere i linguaggi:

a) $L_3 = L_1^*$

b) $L_4 = L_1 L_2$

c) $L_5 = L_1 L_2^*$

d) $L_6 = L_1 \cup L_2$

e) $L_7 = (L_1 L_2)^*$

f) $L_8 = (L_1 \cup L_2)^*$

Esercizio 1 (2)

a) $L_3 = L_1^*$ è formato dalla concatenazione di un numero arbitrario (anche nullo) di elementi di L_1.

$L_3 = \{\epsilon, aa, c, cababc, \dots\}$

b) $L_4 = L_1 L_2$ è formato dalla concatenazione di un elemento di L_1 con un elemento di L_2.

$L_4 = \{aa1, ab1, bc1, c1, aa22, ab22, bc22, c22, aa31, ab31, bc31, c31\}$

c) $L_5 = L_1 L_2^*$ è formato dalla concatenazione di un elemento di L_1 con un numero arbitrario (anche nullo) di elementi di L_2.

$L_5 = \{aa, \dots, c, bc1223131, ab111312222, \dots\}$

Esercizio 1 (3)

d) $L_6 = L_1 \cup L_2$ è l'unione di L_1 e L_2.

$L_6 = \{aa, ab, bc, c, 1, 22, 31\}$

e) $L_7 = (L_1 L_2)^*$ è la chiusura di L_4.

È pertanto formato da una sequenza (eventualmente vuota) di elementi di L_4.

$L_7 = \{\epsilon, aa22c1, ab1aa1, \dots\}$

f) $L_8 = (L_1 \cup L_2)^*$ è la chiusura di L_6.

È pertanto formato da una sequenza (eventualmente vuota) di elementi di L_6.

$L_8 = \{\epsilon, c1122aaccbc, 22131311aa, aa, 1, \dots\}$

Esercizio 2 (1)

Data la grammatica $G = \langle \Sigma, V, P, S \rangle$:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $V = \{S, X, Y\}$
- $P = \{S ::= Y|a,\ Y ::= bX|aX,\ X ::= aY|b\}$

mostrare la sequenza di regole da applicare per generare le seguenti frasi:

a) bb

b) $aababb$

c) $babaab$

Esercizio 2 (2)

a) bb $\quad S ::= Y|a,\ Y ::= bX|aX,\ X ::= aY|b$

bb	
	S
$S ::= Y$	Y
$Y ::= bX$	bX
$X ::= b$	bb

Esercizio 2 (3)

b) $aababb$ $\quad S ::= Y|a,\ Y ::= bX|aX,\ X ::= aY|b$

$aababb$	
	S
$S ::= Y$	Y
$Y ::= aX$	aX
$X ::= aY$	aaY
$Y ::= bX$	$aabX$
$X ::= aY$	$aabaY$
$Y ::= bX$	$aababX$
$X ::= b$	$aababb$

Esercizio 2 (4)

c) $babaab$ $\quad S ::= Y|a,\ Y ::= bX|aX,\ X ::= aY|b$

$babaab$	
	S
$S ::= Y$	Y
$Y ::= bX$	bX
$X ::= aY$	baY
$Y ::= bX$	$babX$
$X ::= aY$	$babaY$
$Y ::= aX$	$babaaX$
$X ::= b$	$babaab$

Esercizio 3 (1)

Data la grammatica $G = \langle \Sigma, V, P, S \rangle$:

- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $V = \{S, X, Y\}$
- $P = \{S ::= X|aX,\ X ::= Xb|bXY|b,\ Y ::= cY|c\}$

mostrare la sequenza di regole da applicare per generare le seguenti frasi:

a) bbb

b) $abbcc$

c) $abbbcc$

Esercizio 3 (2)

a) bbb $\quad S ::= X|aX,\ X ::= Xb|bXY|b,\ Y ::= cY|c$

bbb	
	S
$S ::= X$	X
$X ::= Xb$	Xb
$X ::= Xb$	Xbb
$X ::= b$	bbb

Esercizio 3 (3)

b) $abbcc$ $\quad S ::= X|aX,\ X ::= Xb|bXY|b,\ Y ::= cY|c$

$abbcc$	
	S
$S ::= aX$	aX
$X ::= bXY$	$abXY$
$X ::= b$	$abbY$
$Y ::= cY$	$abbcY$
$Y ::= c$	$abbcc$

Esercizio 3 (4)

c) $abbbcc$ $S ::= X|aX,\ X ::= Xb|bXY|b,\ Y ::= cY|c$

$abbbcc$	
	S
$S ::= aX$	aX
$X ::= bXY$	$abXY$
$X ::= bXY$	$abbXYY$
$X ::= b$	$abbbYY$
$Y ::= c$	$abbbcY$
$Y ::= c$	$abbbcc$

$abbbcc$	
	S
$S ::= aX$	aX
$X ::= bXY$	$abXY$
$X ::= Xb$	$abXbY$
$X ::= b$	$abbbY$
$Y ::= cY$	$abbbcY$
$Y ::= c$	$abbbcc$

Ambigua!

Esercizio 4 (1)

Data la grammatica $G = \langle \Sigma, V, P, S \rangle$:

- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $V = \{S, X, Y\}$
- $P = \{S ::= X|aX,\ X ::= aXb|b|XY,\ Y ::= b|XYa|c\}$

mostrare la sequenza di regole da applicare per generare le seguenti frasi:

a) $aabbcbb$

b) $aabbbca$

Esercizio 4 (2)

a)

$aabbcbb$

	S
$S ::= X$	X
$X ::= aXb$	aXb
$X ::= aXb$	$aaXbb$
$X ::= XY$	$aaXYbb$
$Y ::= c$	$aaXcbb$
$X ::= XY$	$aaXYcbb$
$X ::= b$	$aabYcbb$
$Y ::= b$	$aabbcbb$

b)

$aabbbca$

	S
$S ::= aX$	aX
$X ::= XY$	aXY
$Y ::= XYa$	$aXXYa$
$Y ::= c$	$aXXca$
$X ::= b$	$aXbca$
$X ::= aXb$	$aaXbbca$
$X ::= b$	$aabbbca$

Stefano Ferrari ★ Università degli Studi di Milano

Fondamenti di Informatica per la Sicurezza ◇ Grammatiche ◇ a.a. 2006/07 - p. 37/37