

**Fondamenti di informatica per la sicurezza**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

anno accademico 2006–2007

docente: Stefano FERRARI

01.12.2006 — Soluzione del primo compitino — versione Bvalutazioni **1** (5) _____ **2** (5) _____ **3** (5) _____ **4** (4) _____ **5** (4) _____ **6** (9) _____

Cognome _____	Nome _____
Matricola _____	Firma _____

Esercizio 1

Per ogni numero k , calcolare il corrispondente numerale nella base n indicata:

- a) $k = (412)_7, n = 10$
 b) $k = (37)_{10}, n = 2$
 c) $k = (C1)_{16}, n = 2$
 d) $k = (325)_8, n = 2$
 e) $k = (241)_5, n = 2$
 f) $k = (1001011)_2, n = 16$

Soluzione

a) $(412)_7 = 4 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 4 \cdot 49 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 196 + 7 + 2 = 205$

$$(412)_7 = (205)_{10}$$

b)

quoziente	resto
37	
18	1
9	0
4	1
2	0
1	0
0	1

$$(37)_{10} = (100101)_2$$

c)

base 16	C	1
base 2	1100	0001

$$(C1)_{16} = (11000001)_2$$

d)

base 8	3	2	5
base 2	011	010	101

$$(325)_8 = (11010101)_2$$

e) $(241)_5 = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 50 + 20 + 1 = 71$

quoziente	resto
71	
35	1
17	1
8	1
4	0
2	0
1	0
0	1

$$(241)_5 = (1000111)_2$$

f)

base 2	0100	1011
base 16	4	B

$$(1001011)_2 = (4B)_{16}$$

Esercizio 2

Dati $a = -18$, $b = 4$ e $n = 5$, calcolare in complemento a 2 a n bit, specificando se si verifica un overflow:

- le stringhe binarie s_a e s_b che codificano rispettivamente a e b ;
- la somma delle stringhe binarie s_a e s_b ;
- la differenza delle stringhe binarie s_a e s_b .

Soluzione

Con la codifica in complemento a 2 a 5 bit possono essere rappresentati tutti i numeri interi compresi fra -2^{5-1} e $2^{5-1} - 1$. Possono pertanto essere rappresentati senza causare overflow tutti e soli i numeri x che rispettano la condizione $-16 \leq x \leq 15$.

- $2^n + a = 2^5 - 18 = 14$. Codificando 14 in binario e troncando tale codifica a 5 bit si ottiene: $s_a = 01110$.

Poiché $a = -18 < -16$, si è verificato un overflow.

$2^n + b = 2^5 + 4 = 36$. Codificando 36 in binario e troncando tale codifica a 5 bit si ottiene: $s_b = 00100$.

Poiché $-16 \leq 4 \leq 15$, non si è verificato un overflow.

2. La somma binaria di 01110 e 00100, troncata a 5 bit è: $s_a + s_b = 10010$.

Poiché s_a e s_b hanno il primo bit uguale, ma diverso dal primo bit della loro somma, 10010, si è verificato un overflow.

3. La differenza viene calcolata come somma di s_a e di $-s_b$.

$$\begin{array}{rcl}
 00100 & \text{sottraendo, } s_b & \\
 11011 & + \text{ negazione delle cifre di } s_b, \overline{s_b} & \\
 \hline
 1 & = & \\
 11100 & + & -s_b \\
 01110 & = & s_a \\
 \hline
 101010 & & \text{si devono considerare solo gli} \\
 & & \text{ultimi 5 bit} \\
 01010 & & s_a - s_b
 \end{array}$$

Poiché s_a e s_b hanno il primo bit uguale, non si è verificato un overflow.

Esercizio 3

Una azienda di ristorazione confeziona panini con le seguenti caratteristiche:

- tipo: semola, integrale, rustico;
- farcitura: prosciutto, formaggio, verdure, salame;
- salsa: maionese, salsa tonnata.

I panini vengono venduti confezionati in un scatola che ne contiene 3, tutti colla stessa salsa, ma con almeno una delle altre caratteristiche diversa. Al fine di prolungare la durata del prodotto, la scatola ha un'apertura tale da consentire l'estrazione di un panino per volta (in ordine inverso a quello di inserimento).

Si calcoli:

- il numero di bit necessari per codificare ciascuna caratteristica (tipo, farcitura, salsa);
- il numero di bit necessari per codificare un panino;
- il numero di bit necessari per codificare le possibili confezioni.

Soluzione

- 3 tipi: $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$ bit;
 - 4 farciture: $\lceil \log_2 4 \rceil = 2$ bit;
 - 2 salse: $\lceil \log_2 2 \rceil = 1$ bit.
- Per la regola moltiplicativa, ci sono $3 \times 4 \times 2 = 24$ possibili panini, quindi servono $\lceil \log_2 24 \rceil = 5$ bit.
- In ogni confezione, i panini devono essere diversi. Per ogni salsa, possono esserci $3 \times 4 = 12$ panini. Poiché la confezione è tale da rendere importante l'ordine, per ogni salsa il numero di configurazioni che possono essere assunte da una confezione è dato dalle disposizioni semplici di 12 elementi su 3 posti:

$$\begin{aligned}
 D(12, 3) &= 12 \cdot 11 \cdot 10 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 5 \\
 &= 2^3 \cdot 165
 \end{aligned}$$

Si potranno quindi avere $2 \cdot 2^3 \cdot 165 = 2^4 \cdot 165$ possibili confezioni ($2^3 \cdot 165$ per ognuna delle due salse). Poiché la prima potenza di 2 che supera 165 è 2^8 , per codificare le possibili confezioni serviranno $\lceil \log_2(2^4 \cdot 165) \rceil = \lceil \log_2 2^4 + \log_2 165 \rceil = \lceil 4 + \log_2 165 \rceil = 4 + \lceil \log_2 165 \rceil = 4 + 8 = 12$ bit.

Esercizio 4

Sia data la seguente formula, F :

$$F = ((p \vee q) \wedge \neg r) \rightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$$

- Costruire la tavola di verità di F .
- F è una tautologia? Motivare la risposta.

Soluzione

- La tabella di verità di F è riportata in figura 1.
- Poiché almeno una interpretazione rende falsa la proposizione F , essa non è una tautologia.

Esercizio 5

Formalizzare le seguenti proposizioni (ipotizzando che chi non disegna, scriva, e viceversa):

- se Antonio disegna, Bice e Carlo scrivono;
- Carlo non scrive, Bice o Antonio sì;
- Carlo oppure Bice scrivono;
- Antonio disegna solo se anche Bice fa lo stesso;
- Bice scrive se e solo se Antonio e Carlo disegnano.

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \wedge \neg r$	$\neg p$	$q \leftrightarrow \neg p$	$\alpha \rightarrow \beta$
F	F	F	F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	F
V	V	V	V	F	F	F	F	V
					α		β	

Figura 1: Tabella di verità della proposizione dell'esercizio 4a.

Soluzione

Dati i seguenti simboli proposizionali:

a Antonio disegna

$\neg a$ Antonio scrive

b Bice disegna

$\neg b$ Bice scrive

c Carlo disegna

$\neg c$ Carlo scrive

le frasi dell'esercizio possono essere formalizzate tramite le seguenti proposizioni:

a) $a \rightarrow (\neg b \wedge \neg c)$

b) $c \wedge (\neg b \vee a)$

c) $\neg c \vee \neg b$

d) $a \rightarrow b$

e) $\neg b \leftrightarrow (a \wedge c)$

b)

(1) $(a \wedge c) \vee b$ Ip1

(2) $\neg(a \wedge c) \rightarrow b$ Def. implicazione (1)

(3) $c \rightarrow (b \vee \neg a)$ Ip2

(4) $\neg c \vee (b \vee \neg a)$ Def. implicazione (3)

(5) $(\neg c \vee \neg a) \vee b$ Associatività (4)

(6) $\neg(c \wedge a) \vee b$ Legge di De Morgan (5)

(7) $(c \wedge a) \rightarrow b$ Def. implicazione (6)

(8) $(a \wedge c) \rightarrow b$ Commutatività (7)

(9) b Dim. per casi (2) e (8)

c)

(1) $b \vee (a \wedge c)$ Ip2

(2) $(b \vee a) \wedge (b \vee c)$ Distributività (1)

(3) $b \vee a$ Elim. congiunzione (2)

(4) $\neg b \rightarrow a$ Def. implicazione (3)

(5) $\neg a$ Ip1

(6) b Modus Tollens (4) e (5)

Esercizio 6

Dimostrare la validità delle seguenti inferenze:

a) **Ip1** $\neg a \leftrightarrow (c \rightarrow b)$

Ip2 a

Tesi $\neg b$

b) **Ip1** $(a \wedge c) \vee b$

Ip2 $c \rightarrow (b \vee \neg a)$

Tesi b

c) **Ip1** $\neg a$

Ip2 $b \vee (a \wedge c)$

Tesi b

Soluzione

a)

(1) $\neg a \leftrightarrow (c \rightarrow b)$

Ip1

(2) $(\neg a \rightarrow (c \rightarrow b)) \wedge ((c \rightarrow b) \leftrightarrow \neg a)$ Def. biimplicazione (1)

(3) $(c \rightarrow b) \leftrightarrow \neg a$ Elim. congiunzione (2)

(4) a Ip2

(5) $\neg(c \rightarrow b)$ Modus Tollens (3) e (4)

(6) $\neg(\neg c \vee b)$ Def. implicazione (5)

(7) $c \wedge \neg b$ Legge di De Morgan (6)

(8) $\neg b$ Elim. congiunzione (7)