Fondamenti di Informatica

per la Sicurezza

a.a. 2005/06

Esercizi di codifica binaria

Stefano Ferrari

Università degli Studi di Milano
Dipartimento di Tecnologie
dell'Informazione

Contare con le dita

D Fino a quanto si può contare usando solo le dita di due mani?

R Ipotizzando che ogni dito possa assumere solo due posizioni (disteso o chiuso):

- si hanno 10 elementi indipendenti;
- ogni elemento può assumere due configurazioni;
- il numero di configurazioni totali è $2^{10} = 1024$.

Si può quindi contare da 1 a 1024 (o da 0 a 1023!).

Colori

D Quanti colori possono essere rappresentati in una codifica RGB a 1 byte per canale?

R Ognuno dei canali (R, G e B) ha a disposizione 8 bit.

In totale, dunque, $8 \times 3 = 24$ bit.

Sono quindi rappresentabili $2^{24} = 16\,777\,216$ colori.

La codifica a 24 bit è chiamata comunemente "a 16 milioni di colori".

Dimensione di una immagine digitale

D Quanti bit servono per rappresentare un'immagine 1024 × 768 a colori, 8 bit per canale colore?

R I pixel sono $1024 \times 768 = 786\,432$.

Ogni pixel è rappresentato da 3 colori (rosso, verde e blu) e ogni colore occupa 8 bit.

Una immagine così fatta, occupa quindi:
$786\,432 \times 3 \times 8 = 18\,874\,368$ bit.

Essi equivalgono a $18\,874\,368/8 = 2\,359\,296$ byte.

Cioè $2\,359\,296/1024 = 2304$ kiB (*kibibyte*).

O $2304/1024 = 2,25$ MiB (*mebibyte*).

Codifica per le carte da briscola

D Quale può essere una buona codifica per le carte di un mazzo da briscola?

R Poiché il mazzo di carte da briscola è composto da 40 carte, si dovranno utilizzare 6 bit:

- $\lceil \log_2 40 \rceil = 6$

Uno dei modi di ottenere una codifica è individuare una enumerazione degli elementi dell'insieme da rappresentare e poi tradurre in binario tali valori.

Enumerazione per le carte da briscola

Per esempio, poiché il mazzo di carte da briscola è composto 10 carte per ognuno dei 4 semi, si può scegliere:

seme	carte	ordine	codifica
bastoni	asso, 2–7, fante, cavallo, re	0–9	000000–001001
coppe	asso, 2–7, fante, cavallo, re	10–19	001010–010011
denari	asso, 2–7, fante, cavallo, re	20–29	010100–011101
spade	asso, 2–7, fante, cavallo, re	30–39	011110–100111

L'enumerazione proposta sarebbe una buona codifica in decimale: la prima cifra rappresenta il seme (0–3) e la seconda il valore (0–9).

Codifica per le carte da briscola

Una codifica migliore può essere ottenuta utilizzando le prime due cifre binarie per rappresentare il seme, e le rimanenti per il valore:

seme	carte	codifica
bastoni	asso, 2–7, fante, cavallo, re	00 0000 – 00 1001
coppe	asso, 2–7, fante, cavallo, re	01 0000 – 01 1001
denari	asso, 2–7, fante, cavallo, re	10 0000 – 10 1001
spade	asso, 2–7, fante, cavallo, re	11 0000 – 11 1001

Il vantaggio di questa codifica rispetto alla precedente è la facilità di codifica/decodifica.

Altra codifica per le carte da briscola

Un'altra codifica può essere ottenuta utilizzando le quattro cifre binarie per il valore in modo da codificare esplicitamente le carte che danno punti:

carte	codifica	carte	codifica
2	0000	fante	1000
4	0001	cavallo	1001
5	0010	re	1010
6	0011	tre	1011
7	0100	asso	1100

Riassumendo ...

Una carta è caratterizzata da seme e valore.

Ogni seme può assumere 4 configurazioni, mentre ogni valore può assumere 10 configurazioni.

oggetto	#config.	#bit
seme	4	2
valore	10	4
carta	$4 \times 10 = 40$	6

La codifica "seme+valore" usa lo stesso numero di bit della codifica "carta", ma non è una regola generale.

Codifica per le automobili

Un'auto è prodotta in 3 motorizzazioni e 10 colori.

Quanti bit sono necessari per descrivere un modello di questa automobile?

oggetto	#config.	#bit
motore	3	2
colore	10	4
automobile	$3 \times 10 = 30$	5

In questo caso, la codifica "motore+colore" è più ingombrante della codifica "automobile".

Regola generale

Sebbene:

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$

In generale:

$$\lceil \log_b mn \rceil \leq \lceil \log_b m \rceil + \lceil \log_b n \rceil$$

Una mano a briscola

D Quanti bit servono per codificare una mano di briscola?

R Una mano di briscola è composta da tre carte (diverse tra loro) prese da un mazzo di carte.

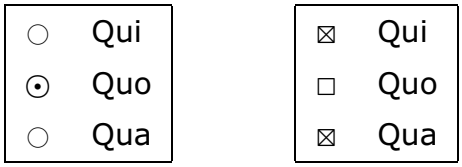
Una mano di briscola è quindi equivalente ad una combinazione di quaranta oggetti su tre posizioni.

Poiché $C(40,3) = \frac{40!}{37!\cdot 3!} = \frac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2} = 9880$, serviranno $\lceil \log_2 9880 \rceil = 14$ bit.

Nota: ripetere tre volte la codifica della singola carta richiede 18 bit.

Rappresentare elementi e insiemi (1)

D Gli oggetti sotto riportati sono elementi delle comuni interfacce grafiche. Come rappresentare in binario gli stati di tali oggetti?



Radio button *Check box*

R I *radio button* permettono di selezionare uno solo degli n elementi della lista, mentre le *check box* consentono di selezionare un sottoinsieme degli n elementi della lista.

Rappresentare elementi e insiemi (2)

Quante configurazioni diverse può assume un gruppo di n radio button?

Solo una voce può essere attiva.

Quindi, il numero di configurazioni sarà pari a n.

Pertanto, saranno necessari $\lceil \log_2 n \rceil$ bit.

Nel caso in esame, useremo 2 bit per i radio button.

Rappresentare elementi e insiemi (3)

Lo stato di un gruppo di check box equivale ad un sottoinsieme delle voci.

Il numero di sottoinsiemi di un insieme di n elementi è 2^n.

È necessario dedicare un bit per ogni voce per indicare se essa è attiva o no.

Pertanto, saranno necessari n bit.

Nel caso in esame, useremo 3 bit per i check box.

Rappresentare elementi e insiemi (4)

Enumeriamo le voci come di seguito riportato:

○	Qui		0	☒	Qui
⊙	Quo		1	□	Quo
○	Qua		2	☒	Qua

Possiamo individuare le seguenti codifiche:

Radio button: la posizione della voce attiva (1) si può codificare con la stringa binaria 01;

Check box: ponendo ad 1 i bit corrispondenti alle voci attive ed a 0 gli altri:

posizione	2 1 0
valore	1 0 1

Gelateria (1)

Una gelateria dispone di 12 gusti di gelato, 5 guarnizioni e 2 contenitori.

I gelati che vende sono sempre composti da un contenitore, 3 gusti e 2 guarnizioni.

I contenitori sono divisi in tre scomparti asimmetrici.

Le guarnizioni vengono distribuite uniformemente sul gelato.

Calcolare i bit necessari per codificare:

a) i singoli elementi (gusti, guarnizioni, contenitori);

b) un gelato.

Gelateria (2)

a) Codifica dei singoli elementi (gusti, guarnizioni, contenitori):
   - 12 gusti $\rightarrow \lceil \log_2 12 \rceil = 4$ bit;
   - 5 guarnizioni $\rightarrow \lceil \log_2 5 \rceil = 3$ bit;
   - 2 contenitori $\rightarrow \lceil \log_2 2 \rceil = 1$ bit.

Gelateria (3)

b) Codifica del gelato (3 gusti, 2 guarnizioni, 1 contenitore).

I gusti possono essere ripetuti e l'ordine è importante:
$D_r(12, 3) = 12^3$ configurazioni.

Anche le guarnizioni possono essere ripetute, ma non importa l'ordine:
$C_r(5, 2) = C(6, 2) = 15$ configurazioni.

Il contenitore può essere solo uno:
2 configurazioni.

Perciò si possono avere $12^3 \cdot 15 \cdot 2$ possibili gelati.

Gelateria (4)

b) Codifica del gelato (3 gusti, 2 guarnizioni, 1 contenitore).

Con qualche passaggio matematico:
$12^3 \cdot 15 \cdot 2 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 15 = 2^7 \cdot 405$

Serviranno quindi:
$\lceil \log_2 2^7 \cdot 405 \rceil = \lceil \log_2 2^7 + \log_2 405 \rceil$
$= \lceil 7 + \log_2 405 \rceil = 7 + \lceil \log_2 405 \rceil = 7 + 9 = 16$ bit.