Fondamenti di Informatica

per la Sicurezza

a.a. 2005/06

Note aggiuntive di logica proposizionale

Stefano Ferrari

Università degli Studi di Milano
Dipartimento di Tecnologie
dell'Informazione

Connettivi binari

A parte la negazione, un connettivo logico è un operatore binario.

Ogni connettivo binario ha $2^2 = 4$ possibili interpretazioni.

Ogni interpretazione può assumere 2 valori.

Quindi esistono $2^4 = 16$ connettivi logici (binari).

Analogamente, si può vedere che esistono 4 connettivi logici unari, e che la negazione è uno di questi.

Funzione logica

Una funzione logica è una funzione $\{F, V\}^n \to \{F, V\}$.

$z = f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ è una legge che fa corrispondere ad ogni combinazione di valori logici di $a_1, \cdots, a_n$ uno e un solo valore di z.

Esempi:

- una proposizione con n simboli enunciativi è una funzione logica $\{F, V\}^n \to \{F, V\}$;
- il connettivo binario $\vee$ è una funzione logica $\{F, V\}^2 \to \{F, V\}$.

Connettivi usati

Perché su 4 connettivi unari e 16 connettivi binari sono stati scelti proprio $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$ e $\leftrightarrow$?

Perché tramite di essi si possono ottenere tutte le funzioni logiche.

Per esempio, il connettivo $\veebar$ descritto dalla tabella di verità a lato equivale a $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$.

Esso è conosciuto anche come aut, XOR, o OR esclusivo.

a	b	$\veebar$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Insiemi funzionalmente completi (1)

Gli insiemi di connettivi che permettono di ottenere una qualsiasi funzione logica si dicono insiemi funzionalmente completi.

Sono funzionalmente completi gli insiemi:

- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\neg, \wedge, \vee\}$

Insiemi funzionalmente completi (2)

Anche gli insiemi di connettivi:

- $\{\bar{\vee}\}$, dove $a \bar{\vee} b \equiv \neg(a \vee b)$ (NOR o OR negato)
- $\{\bar{\wedge}\}$, dove $a \bar{\wedge} b \equiv \neg(a \wedge b)$ (NAND o AND negato)

sono insiemi funzionalmente completi.

Motivazioni

Perché usare cinque connettivi quando ne basta uno?

I motivi sono (almeno) due:

- **formale**: benché equivalenti, non tutti i connettivi hanno le stesse proprietà;
- **pratico**: alcuni connettivi hanno un significato più intuitivo.

Logica proposizionale e algebra booleana

Si può dimostrare che

$$\langle \{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{V}\}, \{\neg, \vee, \wedge\} \rangle$$

rispetta gli assiomi dell'algebra booleana.

In particolare:

- $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{V}\}$, dove $0 \equiv \boldsymbol{F}$ e $1 \equiv \boldsymbol{V}$
- $\vee \; \equiv \; +$
- $\wedge \; \equiv \; \cdot$
- $\neg \; \equiv \; ^{-}$

Logica e intuitività

Alcuni connettivi hanno un significato più intuitivo di altri.

Questo può essere fatto derivare dalla nostra cultura, ma ha anche delle basi fisiologiche.

Wason (fine anni '60) ha condotto degli studi a riguardo.

Un suo famoso esperimento richiede un mazzo di carte con una lettera su una faccia ed un numero sull'altra.

Esperimento di Wason (1)

Date le carte:

A	R	6	7

Quali carte è necessario voltare per poter affermare che la regola

> "se c'è una vocale su una faccia,
> allora sull'altra c'è un numero pari"

sia vera?

Esperimento di Wason (2)

Una percentuale molto bassa di soggetti risponde correttamente al test di Wason.

È però sorprendente che lo stesso test con una mazzo di carte con un'età ed una bevanda sulle due facce, le carte

Whisky	Aranciata	19	16

e con la regola

> "se la bevanda è un superalcolico,
> allora l'età deve essere maggiore di 18"

riceva una risposta corretta dalla maggior parte dei soggetti!

Implicazione

L'implicazione viene generalmente associata all'inferenza.

La proposizione "se oggi è martedì, domani piove oppure se domani piove, oggi è martedì" non pare aver senso.

Eppure la sua formalizzazione $((a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a))$ è una tautologia.

Istintivamente associamo la proposizione data a ciò che dovremmo formalizzare come:

$(a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a)$

Limiti del calcolo proposizionale

La logica proposizionale si limita allo studio degli schemi di composizione di asserzioni.

Non entra nel merito della semantica delle singole asserzioni.

Non permette deduzioni legate solo ad alcuni elementi del dominio considerato.

Per esempio, il famoso sillogismo

> "Tutti gli uomini sono mortali
> e Socrate è un uomo,
> quindi Socrate è mortale"

può solo essere formalizzato come: $a \wedge b \rightarrow c$