Fondamenti di Informatica

per la Sicurezza

a.a. 2004/05

Concetto di numero

Stefano Ferrari

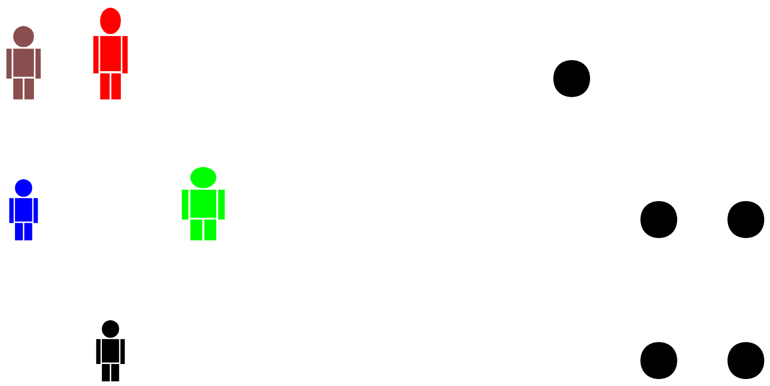
Università degli Studi di Milano
Dipartimento di Tecnologie
dell'Informazione

Aforisma

Aritmetica è contare fino a venti
senza togliersi le scarpe
[Topolino]

Numeri

Un numero è un ente astratto usato per indicare proprietà *quantitative* delle grandezze.



Contare

Per contare, non è necessario conoscere i numeri.

Basta ricorrere a delle relazioni:

- tra grandezze discrete:
  - sassolini e pecore;
  - dita della mano e figli.
- tra grandezze continue:
  - tempo trascorso e candela che brucia;
  - tempo trascorso e spazio percorso dall’ombra.

Astrazione

Le esigenze pratiche possono portare a scoprire concetti più evoluti.

Alcuni esempi:

- confronto tra elementi numerici;
- proprietà delle operazioni;
- assegnazione di nomi a numeri particolari;
- concetto di ordine di grandezza.

Rappresentazione dei numeri

L’elaborazione (o la trasmissione) dei numeri richiede la loro rappresentazione su di un supporto fisico.

Serve quindi:

- mezzo fisico (modificabile, ma stabile);
- codifica.

Sistema di numerazione

Codifica *arbitraria* per rappresentare un *insieme infinito* di oggetti utilizzando un *insieme finito* di simboli.

Numerale

Al concetto astratto di *numero* si affianca la sua rappresentazione simbolica: il ***numerale***.

Interpretazione del numerale:

- un numerale ha significato solo all'interno di un sistema di numerazione.

Sistemi di numerazione

I sistemi di numerazione si dividono principalmente in:

- additivi;
- posizionali.

Sistemi di numerazione additivi (1)

Sistema di numerazione romano:

- in uso nell'antica Roma;
- simboli letterali: I, V, X, L, C, D e M (uno, cinque, dieci, cinquanta, cento, cinquecento e mille);
- i simboli affiancati in ordine decrescente indicano il numero pari alla loro somma;
- se un simbolo precede un simbolo di valore superiore, deve essere sottratto.

Sistemi di numerazione additivi (2)

Sistema di numerazione romano:

- esempio:

MCMLXII

$$1000 + (1000 - 100) + 50 + 10 + 1 + 1$$

$$1962$$

Sistemi di numerazione posizionali

Notazione decimale:

- inventata in India, perfezionata dagli arabi e poi introdotta in Europa da Fibonacci;
- basata su dieci cifre;
- il significato dipende dalla loro posizione.
- Esempio:

$$1203 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Numeri e rappresentazione

Il concetto di "numero" è *indipendente* dalla sua rappresentazione.

Esempio:

+ + + o + o + o o o + o + o o o + o + o

In questo caso, i simboli "+" sono posizionati in corrispondenza di un numero primo.

La scelta della rappresentazione dipende dall'utilizzo che si vuol fare dei numeri rappresentati.

Scelta della notazione posizionale

Se si devono fare calcoli, la notazione posizionale offre alcuni indubbi vantaggi.

Proprietà della notazione posizionale:

- ***somma***: viene operata agendo "localmente" (unità con unità, decine con decine e così via);
- ***traslazione*** (***shift***): moltiplicare o dividere per 10 trasla le cifre di una posizione;
- ***compattezza***: la rappresentazione richiede un numero di cifre logaritmico.

Notazione posizionale (1)

Formalizzazione:

$$(a_n \; \ldots \; a_1 \, a_0)_b \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i, \quad b \geq 2, \; a_i \in \{0, \, \ldots, \, b-1\}$$

- dato un numero intero maggiore o uguale a 2, b, detto *base*,
- la sequenza $a_n \; \ldots \; a_1 \, a_0$,
- composta da $n+1$ simboli scelti dall'insieme $\{0, \, \ldots, \, b-1\}$,
- viene interpretata come $a_n \cdot b^n + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$.

Notazione posizionale (2)

Basi notevoli:

- decimale, $b = 10 \quad a_i \in \{0, \, \ldots, \, 9\}$;
- binaria, $b = 2 \quad a_i \in \{0, \, 1\}$;
- ottale, $b = 8 \quad a_i \in \{0, \, \ldots, \, 7\}$;
- esadecimale, $b = 16 \quad a_i \in \{0, \, \ldots, \, 9, \, A, \, \ldots, \, F\}$.

Esempi:

- $(34)_{10} = 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 34$
- $(34)_8 = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = 28$
- $(34)_{16} = 3 \cdot 16 + 4 \cdot 1 = 52$

Tuttavia ...

In alcuni campi, è più comodo usare una base diversa da quella decimale.

Infatti:

- le uova si vendono a dozzine;
- le ore sono composte da 60 minuti;
- un giorno dura 24 ore.

12 è divisibile per 2, 3, 4 e 6!

Numeri frazionari

Ogni numero intero è rappresentabile utilizzando una qualsiasi base, ma lo stesso non vale per i numeri frazionari:

in base 10 $\frac{1}{3} \equiv (0.\bar{3})_{10}$

in base 3 $\frac{1}{3} \equiv (0.1)_3$

I numeri frazionari si possono rappresentare come:

$$(a_n \, \ldots \, a_2 \, a_1 \, a_0 \, . \, a_{-1} \, \ldots \, a_{-m})_b \equiv \sum_{i=-m}^{n} a_i \cdot b^i, \qquad b \geq 2$$

Cambio di base (1)

Come si scrive in base 12 il numero rappresentato dal numerale $(32)_4$?

NB: Cambia solo la ***rappresentazione*** del numero!

Per rispondere alla domanda serve una piccola digressione: la divisione.

Divisione

Dati due numeri naturali a, b ($b > 0$), la divisione permette di determinare due numeri q ed r tali che

$$a = b \cdot q + r, \qquad 0 \leq r < b$$

dove:

- a è il *dividendo*;
- b è il *divisore*;
- q è il *quoziente* (o *quoto*);
- r è il *resto*.

Cambio di base (2)

L'algoritmo per il cambio di base fa uso degli operatori di divisione intera (***div***) e di resto (***mod***):

div è la parte intera della divisione tra due numeri interi (*quoziente*):
es: 13 *div* 5 = 2

mod è il *resto* della divisione tra due numeri interi:
es: 13 *mod* 5 = 3

Infatti:

$$13 = 5 \cdot 2 + 3$$

Cambio di base (3)

Algoritmo per trovare il numerale del numero n, in una data base, b:

1. Calcolare il quoziente, q, ed il resto, r, della divisione di n per b:
   $q = n$ *div* b
   $r = n$ *mod* b
2. Il resto, r, è l'ultima cifra del numerale che esprime n in base b.
3. Se il quoziente, q, è diverso da zero, le rimanenti cifre si ottengono trasformando il quoziente, sostituendo nei passi precedenti q ad n.
4. Se il quoziente è zero, la conversione è terminata.

Cambio di base (4)

Esempio: $(133)_{10} \longrightarrow (x)_5$

quoziente	resto
133	
26	3
5	1
1	0
0	1

$$133 = 26 \cdot 5 + 3$$
$$26 = 5 \cdot 5 + 1$$
$$5 = 1 \cdot 5 + 0$$
$$1 = 0 \cdot 5 + 1$$

$$(133)_{10} = (1013)_5$$

Cambio di base (5)

Spiegazione:

$$\begin{aligned}
133 &= 26 \cdot 5 + \mathbf{3} = \\
&= (5 \cdot 5 + \mathbf{1}) \cdot 5 + \mathbf{3} = \\
&= ((1 \cdot 5 + \mathbf{0}) \cdot 5 + \mathbf{1}) \cdot 5 + \mathbf{3} = \\
&= (((0 \cdot 5 + \mathbf{1}) \cdot 5 + \mathbf{0}) \cdot 5 + \mathbf{1}) \cdot 5 + \mathbf{3} = \\
&= ((\mathbf{1} \cdot 5 + \mathbf{0}) \cdot 5 + \mathbf{1}) \cdot 5 + \mathbf{3} = \\
&= (\mathbf{1} \cdot 5^2 + \mathbf{0} \cdot 5 + \mathbf{1}) \cdot 5 + \mathbf{3} = \\
&= \mathbf{1} \cdot 5^3 + \mathbf{0} \cdot 5^2 + \mathbf{1} \cdot 5 + \mathbf{3} = \\
&= \mathbf{1} \cdot 5^3 + \mathbf{0} \cdot 5^2 + \mathbf{1} \cdot 5 + \mathbf{3} \cdot 5^0
\end{aligned}$$

$$(133)_{10} = (1013)_5$$

Numero di cifre (1)

Quante cifre, k, bisogna usare per rappresentare in base b il numero n?

Ragionando in base 10:

con 1 cifra:	$0 \ldots 9$	fino a $10^1 - 1$
con 2 cifre:	$10 \ldots 99$	fino a $10^2 - 1$
con 3 cifre:	$100 \ldots 999$	fino a $10^3 - 1$
con k cifre:	$10^{k-1} \ldots 10^k - 1$	fino a $10^k - 1$

k deve essere il più piccolo numero intero tale per cui $b^k - 1 \geq n$.

Per comodità: $b^k \geq n + 1$.

Numero di cifre (2)

Applicando il logaritmo in base b ad entrambi i membri della disequazione precedente:

$$\log_b b^k \geq \log_b(n+1)$$

$$k \geq \log_b(n+1)$$

$$k = \lceil \log_b(n+1) \rceil$$

dove $\lceil x \rceil$ indica il più piccolo numero intero maggiore o uguale a x.

Numero di cifre (3)

Quante cifre sono necessarie per rappresentare 1145 in notazione posizionale in base:
a) 10 b) 2 c) 16?

a) 10: $\log_{10} 1146 \approx 3.0592 \longrightarrow$ 4 cifre.

Infatti: $1145 = (1145)_{10}$.

b) 2: $\log_2 1146 \approx 10.162 \longrightarrow$ 11 cifre.

Infatti: $1145 = (10001111001)_2$.

c) 16: $\log_{16} 1146 \approx 2.5406 \longrightarrow$ 3 cifre.

Infatti: $1145 = (479)_{16}$.

Da base n a decimale

Come si rappresenta in base 10 il numero $(412)_5$?

Dalla definizione di notazione posizionale:

$$\begin{aligned}(412)_5 &= 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = \\ &= 4 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = \\ &= 100 + 5 + 2 = \\ &= 107\end{aligned}$$

$$(412)_5 = (107)_{10}$$

Da decimale a base n

Come si rappresenta in base 3 il numero $(1079)_{10}$?

Algoritmo della divisione:

quoziente	resto
1079	
359	2
119	2
39	2
13	0
4	1
1	1
0	1

$$(1079)_{10} = (1110222)_3$$

Da base m a base n (1)

Come si rappresenta in base 5 il numero $(106)_7$?

Si potrebbe applicare l'algoritmo di divisione, ma è difficile fare i calcoli se la base non è 10.

Meglio risolvere il problema in due passi:

1. conversione da base 7 a decimale;
2. conversione da decimale a base 5.

Da base m a base n (2)

Conversione da base 7 a decimale:

$$(106)_7 = 1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 55$$

Conversione da decimale a base 5:

quoziente	resto
55	
11	0
2	1
0	2

Quindi:

$$(106)_7 = (210)_5$$

Da binario ad ottale

È un caso particolare di conversione da base m a base n: $8 = 2^3$.

Se $n = m^k$, il cambiamento di base si può operare per blocchi.

Esempio: $(101001)_2 = (???)_8$

$$\begin{aligned}
&(101001)_2 = \\
&= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\
&= (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^3 + (0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^0 = \\
&= (5) \cdot 8^1 + (1) \cdot 8^0 = \\
&= (51)_8
\end{aligned}$$

base 2	101	001
base 8	5	1

Da binario ad esadecimale

È un caso particolare di conversione da base m a base n: $16 = 2^4$.

Esempio: $(101001010)_2 = (???)_{16}$

base 2	0001	0100	1010
base 16	1	4	A

$$(101001010)_2 = (14A)_{16}$$

Da ottale a binario

È un caso particolare di conversione da base m a base n: $8 = 2^3$.

Se $m = n^k$, il cambiamento di base si può operare per blocchi.

Esempio: $(51)_8 = (???)_2$

$$= (51)_8 = (5) \cdot 8^1 + (1) \cdot 8^0 =$$
$$= (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^3 + (0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^0 =$$
$$= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
$$= (101001)_2$$

base 8	5	1
base 2	101	001

Da esadecimale a binario

È un caso particolare di conversione da base m a base n: $16 = 2^4$.

Esempio: $(14A)_{16} = (???)_2$

base 16	1	4	A
base 2	0001	0100	1010

$$(14A)_{16} = (101001010)_2$$