Corso di Laurea in Sicurezza dei sistemi e delle reti informatiche

Fondamenti di informatica per la sicurezza

anno accademico 2004–2005

docente: Stefano Ferrari

25.01.2005 — Soluzione della seconda parte — vers. B

valutazioni **1** (4) _____ **2** (4) _____ **3** (4) _____ **4** (6) _____ **5** (6) _____ **6** (8) _____

Cognome _____

Nome _____

Matricola _____ **Firma** _____

Esercizio 1

Siano dati i linguaggi L_1 e L_2:

- $L_1 = \{a, b\}$
- $L_2 = \{x, y, z\}$

Descrivere i linguaggi:

a) $L_3 = L_1 \cap L_2$

b) $L_4 = L_1 \cup L_2$

c) $L_5 = L_1 L_2$

d) $L_6 = {L_2}^2$

e) $L_7 = {L_1}^* {L_2}^*$

f) $L_8 = ({L_2}^2 L_1)^*$

Per quegli insiemi di cui sia troppo lungo (o impossibile) dare una descrizione estensionale, elencare almeno tre elementi, indicando le caratteristiche degli elementi che li compongono. In particolare, chiarire se la stringa vuota ϵ appartiene al linguaggio.

Soluzione

a) $L_3 = L_1 \cap L_2 = \emptyset$
Gli insiemi L_1 e L_2 non hanno elementi in comune, quindi la loro intersezione è vuota.

Nota: L'insieme vuoto $\emptyset$ è diverso dall'insieme costituito dalla sola stringa vuota, $\{\epsilon\}$.

b) $L_4 = L_1 \cup L_2 = \{a, b, x, y, z\}$

c) $L_5 = L_1 L_2 = \{ax, bx, ay, by, az, bz\}$

d) $L_6 = {L_2}^2 = \{xx, yx, zx, xy, yy, zy, xz, yz, zz\}$

e) $L_7 = {L_1}^* {L_2}^*$
L'insieme L_7 è dato dalle stringhe formate come concatenazione di un numero arbitrario (eventualmente nullo) di elementi di L_1 seguito da una concatenazione di un numero arbitrario (eventualmente nullo) di elementi di L_2. Poiché sia ${L_1}^*$ che ${L_2}^*$ sono composto da infiniti elementi, anche L_7 avrà infiniti elementi. L'insieme $\{\epsilon, bbaba, yzxyxy, abbaaxxxy\}$ è un sottoinsieme di L_7.

f) $L_8 = ({L_2}^2 L_1)^*$
L'insieme L_8 è formato dalla concatenazione di un numero arbitrario (eventualmente nullo) di stringhe composte da due elementi di L_2 e da un elemento di L_1. Pertanto, L_8 è composto da infiniti elementi. L'insieme $\{\epsilon, yxa, zybzzaxya\}$ è un sottoinsieme di L_8.

Esercizio 2

Sia data la seguente grammatica, $G = \langle T, V, P, S\rangle$, definita su $\Sigma = \{a, b, c, d\}$:

- insieme dei simboli terminali, T: $T = \Sigma$
- insieme dei metasimboli, V: $V = \{K, H\}$
- insieme delle regole di produzione, P: $P = \{S ::= K, K ::= c|Hb|Hd, H ::= c|Kd|Ha\}$

Quali fra le seguenti stringhe vengono generate da G?

a) $cdab$

b) *cabdd*

c) *dddb*

d) *cdaad*

e) *adab*

Riportare la successione di regole da applicare per la generazione di tali stringhe e le stringhe parziali ottenute, spiegando perché non si possono ottenere le stringhe che eventualmente non risultassero appartenere al linguaggio generato da G.

Soluzione

a)

cdab	
	S
$S ::= K$	K
$K ::= Hb$	Hb
$H ::= Ha$	Hab
$H ::= Kd$	$Kdab$
$K ::= c$	$cdab$

La stringa *cdab* è generata da G: $cdab \in L(G)$.

b)

cabdd	
	S
$S ::= K$	K
$K ::= Hd$	Hd
$H ::= Kd$	Kdd
$K ::= Hb$	$Hbdd$
$H ::= Ha$	$Habdd$
$H ::= c$	$cabdd$

La stringa *cabdd* è generata da G: $cabdd \in L(G)$.

c)

dddb	
	S
$S ::= K$	K
$K ::= Hb$	Hb
$H ::= Kd$	Kdb
$K ::= Hd$	$Hddb$
$H ::= Kd$	$Kdddb$

Non è possibile eliminare il metasimbolo K senza aggiungere un altro simbolo.

La stringa *dddb* non è generata da G: $dddb \notin L(G)$.

d)

cdaad	
	S
$S ::= K$	K
$K ::= Hd$	Hd
$H ::= Ha$	Had
$H ::= Ha$	$Haad$
$H ::= Kd$	$Kdaad$
$K ::= c$	$cdaad$

La stringa *cdaad* è generata da G: $cdaad \in L(G)$.

e)

adab	
	S
$S ::= K$	K
$K ::= Hb$	Hb
$H ::= Ha$	Hab
$H ::= Kd$	$Kdab$

Non è possibile ottenere il simbolo a dal metasimbolo K.

La stringa *adab* non è generata da G: $adab \notin L(G)$.

Esercizio 3

Sia dato il seguente automa a stati finiti, A, $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$:

- insieme degli stati, Q: $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- alfabeto di input, Σ: $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$
- funzione di transizione δ:

	a	b	c	d	e
q_0	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
q_1	q_1	q_0	q_3	q_0	q_3
q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_3
q_3	q_2	q_2	q_0	q_0	q_2

- stato iniziale, q_0
- insieme di stati finali, F: $F = \{q_1\}$

Indicare:

a) quattro stringhe accettate da A

b) quattro stringhe rifiutate da A

Soluzione

a) quattro stringhe accettate da A:

- *abc*
- *eecb*
- *ca*
- *dbb*

b) quattro stringhe rifiutate da A:

- *abde*
- *cb*
- *eac*
- *dba*

Esercizio 4

Modellare, tramite un automa a stati finiti deterministico, il funzionamento del personaggio di Pacman.

Il livello vita del personaggio può assumere le seguenti condizioni: *pacman*, *super-pacman*, *morto*.

Sul personaggio possono essere operate le seguenti azioni: acquisizione bonus (trasformazione da *pacman* a *super-pacman*), timeout (trasformazione da *super-pacman* a *pacman*) e incontro con un fantasmino. L'incontro con un fantasmino non ha alcun effetto su *super-pacman*, mentre porta *pacman* nella condizione di *morto*.

Ipotizzare che non si possano verificare contemporaneamente più azioni. Modellare l'automa in modo che esso accetti solo le stringhe che descrivono il funzionamento corretto del personaggio di Pacman. In particolare, individuare possibili situazioni irrealizzabili e formalizzarle in modo che l'automa rifiuti le successioni di azioni che porterebbero il personaggio in tali situazioni (per esempio, un timeout su *pacman* non dovrebbe verificarsi).

Stati e simboli riportati nel testo sono solo indicativi: possono essere modificati, ridotti ed estesi a secondo delle esigenze del progetto.

Soluzione

L'automa deve modellare le situazioni di funzionamento di un personaggio di un videogioco. Gli stati rappresenteranno la situazione del personaggio, mentre l'insieme dei simboli di input modelleranno gli stimoli che il personaggio riceve dall'esterno (o le azioni che esso subisce).

Questo permette di vedere l'automa come un simulatore del personaggio in esame: l'automa deve accettare le stringhe che rappresentano le sequenze di stimoli (o azioni) che mantengono il personaggio nei comportamenti consentiti oppure quelle che rappresentano una sequenza di eventi di particolare interesse.

Le informazioni date dalle specifiche consentono di definire:

- insieme degli stati, Q:
  $Q = \{p, sp, m, errore\}$
  dove p indica *pacman*, sp indica *super-pacman*, m indica la condizione di *morto* e *errore* viene usato per segnalare situazioni non consentite;
- insieme dei simboli, Σ: $\Sigma = \{b, t, f\}$
  dove b indica l'acquisizione di un bonus, t la cessazione dell'effetto di un bonus e f l'incontro con un fantasmino.

Le specifiche descrivono i seguenti comportamenti:

- l'acquisizione di un bonus porta Pacman da p a sp;
- lo scadere del bonus porta Pacman da sp a p;
- l'incontro con un fantasmino porta Pacman da p a m, ma lo lascia in sp;
- lo scadere del bonus quando Pacman si trova nello stato p è una situazione che non dovrebbe verificarsi, ed è sintomatica di un malfunzionamento.

Inoltre, si può supporre che nessuna azione possa essere operata su Pacman quando esso si trovi nello stato m.

Quest'ultima situazione descrive una situazione fisicamente irrealizzabile. Lo stesso può esser detto della situazione descritta nell'ultima voce dell'elenco delle specifiche. Per formalizzare queste condizioni, si può usare lo stato *errore*, tale per cui una volta raggiunto non lo si possa più lasciare.

Ogni sequenza di azioni che non comporti il raggiungimento dello stato *errore* rappresenta il normale funzionamento della porta. Pertanto, qualsiasi sequenza di simboli che non porti nello stato *errore* deve venire accettata, e, quindi, tutti gli stati tranne *errore* compongono l'insieme degli stati finali, F.

Si può ipotizzare che lo stato iniziale sia, p.

Con queste ipotesi aggiuntive, dovrebbero essere accettate, per esempio, le seguenti sequenze di azioni: $bfftf$, $bbbtbftb$, bt. Al contrario, verrebbero rifiutate, tra le altre, le seguenti sequenze di azioni: fb, t, $btbfftt$. Va notato che aggiungendo un qualsiasi suffisso ad una stringa rifiutata, si ottiene sempre una stringa rifiutata: se una certa sequenza di azioni porta in uno stato non accettabile, qualsiasi sequenza di azioni ad essa successiva non può renderla accettabile.

$\boldsymbol{\delta}$	b	t	f
p	sp	$errore$	m
sp	sp	p	sp
m	$errore$	$errore$	$errore$
$errore$	$errore$	$errore$	$errore$

Tabella 1: Tabella delle transizioni dell'automa dell'esercizio 4.

La tabella delle transizioni, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ può essere quella riportata in Tabella 1.

Esercizio 5

Sia data l'espressione regolare E, definita su $\Sigma = \{a, b, c\}$:

- $E = (b^2a + ab^*)^*c(a^2 + b)^2$

Quali fra le seguenti stringhe vengono descritte da E?

a) *bbabbacbb*

b) *bbaabbcaaaa*

c) *cbaa*

d) *bbbaabbbc*

e) *ccaab*

f) *abbcbb*

Soluzione

Le espressioni regolari denotano degli insiemi di stringhe. In tal senso, possiamo applicare l'operatore di relazione insiemistica $\subseteq$ alle espressioni regolari per indicare che l'insieme denotato da un'espressione contiene l'insieme denotato da una seconda espressione regolare. Per esempio, $E_1 \subseteq E_2$ significa che tutte le stringhe descritte da E_1 sono descritte anche da E_2.

Ricordando che l'espressione regolare s descrive l'insieme di stringhe composto dalla sola s, $\{s\}$, si può dimostrare che tale stringa viene descritta da un'espressione regolare E derivando una catena di inclusioni del tipo $s \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_k \equiv E$.

a) *bbabbacbb*
$bbabbacbb \subseteq (bba)(bba)(c)(bb) \subseteq (bba)^2c(b)^2 \subseteq (b^2a)^*c(a^2b)^2 \subseteq (b^2a + ab^*)^*c(a^2 + b)^2$

La stringa *bbabbacbb* viene descritta da E: $bbabbacbb \in \mathcal{L}(E)$.

b) *bbaabbcaaaa*
$bbaabbcaaaa \subseteq (bba)(abb)(c)(aa)(aa) \subseteq (bba + abb)^2c(aa)^2 \subseteq (b^2a + ab^2)^2c(a^2)^2 \subseteq (b^2a + ab^*)^*c(a^2 + b)^2$

La stringa *bbaabbcaaaa* viene descritta da E: $bbaabbcaaaa \in \mathcal{L}(E)$.

c) *cbaa*
$cbaa \subseteq (c)(b)(aa) \subseteq (c)(b + aa)^2 \subseteq c(b + a^2)^2 \subseteq (b^2a + ab^*)^*c(a^2 + b)^2$

La stringa *cbaa* viene descritta da E: $cbaa \in \mathcal{L}(E)$.

d) *bbbaabbbc*

Le stringhe descritte da E non possono terminare per c.

La stringa *bbbaabbbc* non può essere descritta da E: $bbbaabbbc \notin \mathcal{L}(E)$.

e) *ccaab*

Le stringhe descritte da E devono contenere solo un simbolo c.

La stringa *ccaab* non può essere descritta da E: $ccaab \notin \mathcal{L}(E)$.

f) *abbcbb*
$abbcbb \subseteq (abb)(c)(bb) \subseteq (ab^2)c(b)^2 \subseteq (b^2a + ab^2)c(a^2 + b)^2 \subseteq (b^2a + ab^*)^*c(a^2 + b)^2$

La stringa *abbcbb* viene descritta da E: $abbcbb \in \mathcal{L}(E)$.

Esercizio 6

Indicare una espressione regolare (non banale) definita su $\Sigma = \{a, b, c\}$ che descriva le seguenti stringhe:

- *aaabaaba*
- *baabaaca*
- *aba*
- *aaabaaaca*

ma non le seguenti:

- *abcabbcca*
- *acaba*
- *ababba*
- *caabbaa*

Soluzione

Si può notare che tutte le stringhe da includere terminano per *aba* o *aca* e che nei precedenti termini non è incluso neanche un simbolo c. Questa caratteristica può essere descritta dall'espressione regolare $(a+b)^*a(b+c)a$:

- suffisso *aba* o *aca*: $(a+b)^*\underline{a(b+c)a}$;
- assenza del simbolo c nel prefisso: $\underline{(a+b)^*}a(b+c)a$.

Nessuna delle stringhe del secondo gruppo viene descritta da tale espressione regolare:

- *abcabbcca*: compare più di un simbolo c;
- *acaba*: il simbolo c non è negli ultimi tre simboli;
- *ababba*: termina per *bba*;
- *caabbaa*: termina per *bba* e il simbolo c non è negli ultimi tre simboli.

Altre espressioni regolari che rispettano le specifiche del problema sono:

- $(a+ba)^*a(ba+ca)$
- $(a+ba)^*a(b+c)a$
- $(a+b)^*ab(a+c)^*$