



Fondamenti di informatica per la sicurezza

anno accademico 2003–2004

docente: Stefano FERRARI

Soluzione del secondo compito — 13.01.2004 — versione A

valutazioni **1** (4) _____ **2** (5) _____ **3** (4) _____ **4** (7) _____ **5** (7) _____ **6** (7) _____

Cognome _____

Nome _____

Matricola _____ Firma _____

Esercizio 1

Siano dati i linguaggi L_1 e L_2 :

- $L_1 = \{a, ab, abc\}$
- $L_2 = \{a, 0, 1\}$

Descrivere i linguaggi:

- $L_3 = L_1 \cup L_2$
- $L_4 = L_1 L_2$
- $L_5 = L_1^3$
- $L_6 = L_1 L_2^*$
- $L_7 = (L_1 L_2)^*$
- $L_8 = L_1^* L_2^*$

Per quegli insiemi di cui sia troppo lungo (o impossibile) dare una descrizione estensionale, elencare almeno tre elementi, indicando le caratteristiche degli elementi che li compongono.

Soluzione

- $L_3 = L_1 \cup L_2 = \{a, ab, abc, 0, 1\}$
Nota: L'elemento a deve essere incluso solo una volta.
- $L_4 = L_1 L_2 = \{aa, aba, abca, a0, ab0, abc0, a1, ab1, abc1\}$
- $L_5 = L_1^3$

L'insieme L_5 è formato dalle stringhe che si ottengono concatenando tre stringhe (qualsiasi) appartenenti a L_1 . Poiché L_1 ha 3 elementi, possono essere formate $3^3 = 27$

stringhe come concatenazione di tre elementi di L_1 . L'insieme $\{aaa, aaba, abcaba\}$ è un sottoinsieme di L_5 .

d) $L_6 = L_1 L_2^*$

L'insieme L_6 è formato da stringhe che hanno un elemento di L_1 come prefisso e una concatenazione di un numero arbitrario (eventualmente nullo) di elementi di L_2 come suffisso. Poiché L_2^* è composto da infiniti elementi, anche L_6 avrà infiniti elementi. L'insieme $\{abc, aa0aa01, ab1aa0\}$ è un sottoinsieme di L_6 .

e) $L_7 = (L_1 L_2)^*$

L'insieme L_7 è equivalente a L_4^* . Pertanto, anche L_7 è composto da infiniti elementi. L'insieme $\{\epsilon, abaa1, abc1ab0ab1\}$ è un sottoinsieme di L_7 .

f) $L_8 = L_1^* L_2^*$

Gli elementi dell'insieme L_8 sono il risultato della concatenazione di una stringa di L_1^* con una stringa di L_2^* . Poiché sia L_1^* che L_2^* hanno infiniti elementi, anche L_8 avrà cardinalità infinita. L'insieme $\{\epsilon, abc01a0a, ababca, 01001a\}$ è un sottoinsieme di L_8 .

Esercizio 2

Sia data la seguente grammatica, $G = \langle T, V, P, S \rangle$, definita su $A = \{a, b, c, d\}$:

- insieme dei simboli terminali, T : $T = A$
- insieme dei metasimboli, V : $V = \{K, H\}$

- insieme delle regole di produzione, $P: P = \{S ::= K, K ::= d|Hb, H ::= a|Kc|Hb\}$

Quali fra le seguenti stringhe vengono generate da G ?

- ab
- $cbbab$
- $aaaaa$
- $dcbbb$
- $abcbb$

Riportare la successione di regole da applicare per la generazione di tali stringhe e le stringhe parziali ottenute.

Soluzione

a)

ab	S
$S ::= K$	K
$K ::= Hb$	Hb
$H ::= a$	ab

La stringa ab è generata da G : $ab \in L(G)$.

b)

$cbbab$	S
$S ::= K$	K
$K ::= Hb$	Hb
$H ::= a$	ab

Non è possibile aggiungere altri simboli alla stringa generata, in quanto non ci sono altri metasimboli nella stringa parziale. La stringa $cbbab$ non è quindi generata da G : $cbbab \notin L(G)$.

c)

$aaaaa$	S
$S ::= K$	K

Non esiste nessuna regola che permetta di ottenere il simbolo a dal metasimbolo K . La stringa $aaaaa$ non è quindi generata da G : $aaaaa \notin L(G)$.

d)

$dcbbb$	S
$S ::= K$	K
$K ::= Hb$	Hb
$H ::= Hb$	Hbb
$H ::= Hb$	$Hbbb$
$H ::= Kc$	$Kcbbb$
$K ::= d$	$dcbbb$

La stringa $dcbbb$ è generata da G : $dcbbb \in L(G)$.

e)

$abcbb$	S
$S ::= K$	K
$K ::= Hb$	Hb
$H ::= Hb$	Hbb
$H ::= Kc$	$Kcbb$
$K ::= Hb$	$Hbcbb$
$H ::= a$	$abcbb$

La stringa $abcbb$ è generata da G : $abcbb \in L(G)$.

Esercizio 3

Sia dato il seguente automa a stati finiti, $A, A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$:

- insieme degli stati, $Q: Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

- alfabeto di input, $\Sigma: \Sigma = \{a, b, c, d, e\}$

- funzione di transizione δ :

	a	b	c	d	e
q_0	q_1	q_3	q_1	q_2	q_1
q_1	q_3	q_3	q_0	q_1	q_2
q_2	q_0	q_1	q_1	q_0	q_1
q_3	q_0	q_1	q_2	q_1	q_1

- stato iniziale, q_0

- insieme di stati finali, $F: F = \{q_1\}$

Indicare:

a) quattro stringhe accettate da A

b) quattro stringhe rifiutate da A

Soluzione

a) quattro stringhe accettate da A :

- a
- aab
- $cabbd$
- $aaccd$

b) quattro stringhe rifiutate da A :

- $acda$
- $caab$
- $accaa$
- $cbeba$

Esercizio 4

Un robot autonomo deve circolare su una pista di colore bianco con il bordo destro di colore verde e il bordo sinistro di colore blu. Una banda rossa (larga quanto la pista) contraddistingue l'arrivo. Il robot è dotato di un sensore in grado di percepire il colore della pista sottostante.

Modellare il comportamento del robot tramite un automa a stati finiti deterministico, dove gli stati rappresentano le manovre che il robot deve eseguire (*curva a destra*, *curva a sinistra*, *avanti diritto* e *fermo*) e i valori letti dal sensore (*rosso*, *bianco*, *verde* e *blu*) rappresentano la stringa di input.

Soluzione

L'automata deve modellare un sistema fisico. L'insieme dei simboli di input modella quindi gli stimoli che il sistema riceve dall'esterno e gli stati descrivono le situazioni in cui il sistema viene a trovarsi.

Questo permette di vedere l'automata come un simulatore del sistema in esame. È quindi ragionevole pensare ad un automata che accetti le stringhe che rappresentano le sequenze di stimoli fisicamente realizzabili oppure quelle che rappresentano una sequenza di eventi di particolare interesse.

Nel caso in esame, sono date le seguenti informazioni:

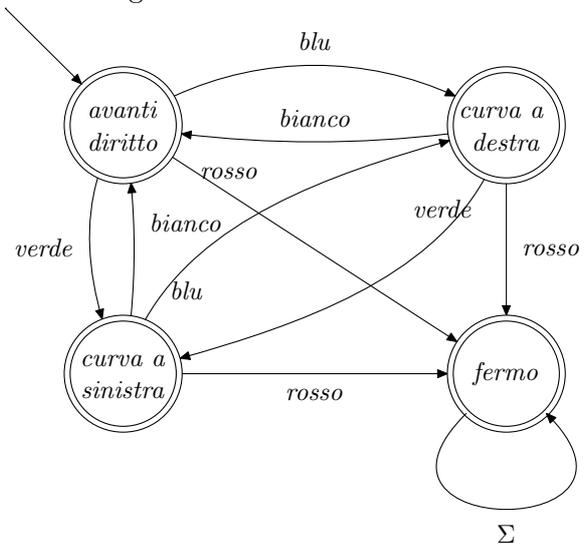
- insieme degli stati, Q :
 $Q = \{\textit{avanti diritto}, \textit{curva a destra}, \textit{curva a sinistra}, \textit{fermo}\}$
- alfabeto di input, Σ :
 $\Sigma = \{\textit{bianco}, \textit{verde}, \textit{blu}, \textit{rosso}\}$

Dalle specifiche è possibile dedurre i seguenti comportamenti:

- se il robot si trova sul verde, deve curvare a sinistra (è sul bordo destro);
- se si trova sul blu, deve curvare a destra (è sul bordo sinistro);
- se si trova sul bianco, deve andare diritto (che altro dovrebbe fare?);
- se si trova sul rosso, deve fermarsi (ha raggiunto l'arrivo).

In assenza di specifiche, si può ipotizzare che una volta incontrato il colore rosso, il robot si

fermi anche se il sensore rileva altri colori. Quindi, i comportamenti precedenti sono validi per tutti gli stati, ad eccezione di quando il robot è fermo. Tale comportamento può essere descritto tramite il seguente automa:



Nella precedente figura, in assenza di esplicite specifiche, sono presenti anche le seguenti assunzioni:

- tutti gli stati sono finali ($F = Q$): non ci sono sequenze di simboli di input che rappresentano una situazione fisicamente impossibile o che causano un comportamento non lecito
- il robot inizia a funzionare dopo essere stato posto sulla pista: si esclude che il primo colore che il sensore rileva sia qualcosa di diverso dal bianco.

La tabella delle transizioni, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ è quindi quella riportata in Tabella 1.

Possono inoltre essere considerate altre varianti:

stato iniziale fittizio si aggiunge all'automata di cui sopra uno stato che non rappresenta nessuna manovra. È uno stato (non finale) q_0 con le seguenti transizioni: $\delta(q_0, \textit{bianco}) = \textit{avanti diritto}$, $\delta(q_0, \textit{blu}) = \textit{curva a destra}$, $\delta(q_0, \textit{verde}) = \textit{curva a sinistra}$, $\delta(q_0, \textit{rosso}) = \textit{fermo}$

stato iniziale partenza si suppone che il robot venga posizionato inizialmente sulla riga rossa. L'automata rimarrà nello stato iniziale *partenza* fino a che non si presenterà un simbolo di input diverso da *rosso*. In questo caso, avverrà una transizione come per la variante dello stato fittizio.

δ	<i>bianco</i>	<i>blu</i>	<i>verde</i>	<i>rosso</i>
<i>avanti diritto</i>	<i>avanti diritto</i>	<i>curva a destra</i>	<i>curva a sinistra</i>	<i>fermo</i>
<i>curva a destra</i>	<i>avanti diritto</i>	<i>curva a destra</i>	<i>curva a sinistra</i>	<i>fermo</i>
<i>curva a sinistra</i>	<i>avanti diritto</i>	<i>curva a destra</i>	<i>curva a sinistra</i>	<i>fermo</i>
<i>fermo</i>	<i>fermo</i>	<i>fermo</i>	<i>fermo</i>	<i>fermo</i>

Tabella 1: Tabella delle transizioni dell'automa dell'esercizio 4

$F = \{\mathbf{fermo}\}$ l'automa accetta solo le sequenze che condurrebbero il robot all'arrivo. Con questa variante si può aggiungere uno stato che catturi l'automa se dopo un simbolo *rosso* venga presentato un simbolo diverso.

Esercizio 5

Sia data l'espressione regolare E , definita su $\Sigma = \{a, b, c\}$:

- $E = (bc + ab)^*ac(b + a)^2$

Quali fra le seguenti stringhe vengono descritte da E ?

- bcababacba*
- abcccac*
- abbcacbb*
- bcbcacab*
- ccababab*
- acaa*
- aabccbaa*

Soluzione

Le espressioni regolari denotano degli insiemi di stringhe. In tal senso, possiamo applicare l'operatore di relazione insiemistica \subseteq alle espressioni regolari per indicare che l'insieme denotato da un'espressione contiene l'insieme denotato da una seconda espressione regolare. Per esempio, $E_1 \subseteq E_2$ significa che tutte le stringhe descritte da E_1 sono descritte anche da E_2 .

Ricordando che l'espressione regolare s descrive l'insieme di stringhe composto dalla sola s , $\{s\}$, si può dimostrare che tale stringa viene descritta da un'espressione regolare E derivando una catena di inclusioni del tipo $s \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_k \equiv E$.

- bcababacba*
 $bcababacba = (bcabab)ac(ba) = (bc + ab)^3ac(a + b)^2 \subseteq (bc + ab)^*ac(b + a)^2$.

La stringa *bcababacba* viene descritta da E .

- abcccac*
abcccac termina con il simbolo c . Non può essere descritta da E , altrimenti dovrebbe terminare con a o b .

- abbcacbb*
 $abbcacbb = (abbc)ac(bb) = (ab + bc)^2ac(b)^2 \subseteq (bc + ab)^*ac(b)^2 \subseteq (bc + ab)^*ac(b + a)^2$.

La stringa *bcababacba* viene descritta da E .

- bcbcacab*
 $bcbcacab = (bcbc)ac(ab) = (bc)^2ac(a + b)^2 \subseteq (bc + ab)^2ac(b + a)^2 \subseteq (bc + ab)^*ac(b + a)^2$.

La stringa *bcbcacab* viene descritta da E .

- ccababab*
ccababab inizia con c . Tale simbolo non può essere generato da $(bc + ab)^*$ e, nel caso la sottoespressione regolare $(bc + ab)^*$ fosse usata per generare la stringa nulla, non può essere generato da a . Quindi *ccababab* non viene descritta da E .

- acaa*
 $acaa = (\epsilon)ac(a)^2 \subseteq (bc + ab)^*ac(a)^2 \subseteq (bc + ab)^*ac(b + a)^2$.

La stringa *acaa* viene descritta da E .

- aabccbaa*
aabccbaa non contiene la sottostringa *ac*. Pertanto non può essere descritta da E :
 $E = (bc + ab)^*\underline{ac}(b + a)^2$.

Esercizio 6

Indicare una espressione regolare definita su $\Sigma = \{a, b, c\}$ che descriva le seguenti stringhe:

- *aac*
- *abcaab*
- *bacabbb*
- *bbcabbab*

ma non le seguenti:

- $aaacba$
- $bccbaab$
- $bbccb$
- $baabbac$

Soluzione

Si può notare che le stringhe da descrivere hanno tutte una sola c e che tale simbolo è sempre il terzo della stringa. Questa caratteristica può essere descritta dall'espressione regolare $(a + b)^2c(a + b)^*$:

- c è una sola c : $(a + b)^2\underline{c}(a + b)^*$
- è preceduta da due simboli (diversi da c): $\underline{(a + b)^2}c(a + b)^*$
- la c può essere seguita da altri simboli (diversi da c): $(a + b)^2c\underline{(a + b)^*}$

Nessuna delle stringhe del secondo gruppo viene descritta da questa espressione regolare:

- $aaacba$: ha la c al quarto posto
- $bccbaab$: ha due c
- $bbccb$: ha due c
- $baabbac$: ha la c al settimo posto

La soluzione proposta, non è tuttavia unica. Per esempio, anche $(a + b)^2c(ab^*)^*$ risponde ai requisiti richiesti.