Modellazione di casi reale mediante variabili aleatorie

S. Ferrari e F. Scotti

10 gennaio 2006

1 Esercizi

1.1 Caso 1

Un macchinario sbriciola sassi pestandoli ripetutamente con un pesante maglio. Dopo tale lavorazione, il materiale viene filtrato attraverso un paio di setacci, in modo da eliminare tutte le particelle di dimensione maggiore a 3 mm e inferiore a 1 mm.

La tabella seguente descrive una misura a campione del diametro effettuata su 30 particelle:

#	X	#	X	#	X
1	1.625907	11	1.190534	21	1.065970
2	1.811369	12	2.801254	22	1.870630
3	1.710535	13	1.722236	23	1.433498
4	2.206612	14	1.877600	24	1.527578
5	1.445743	15	2.035015	25	2.974616
6	1.297505	16	1.813185	26	1.904143
7	1.302749	17	1.781722	27	2.547951
8	2.304372	18	2.291870	28	1.888485
9	2.947687	19	2.824240	29	2.471540
10	1.364765	20	1.714070	30	1.473395

Se X descrive la dimensione delle particelle così ottenute, di che tipo è la variabile aleatoria X? Quale è la sua media?

1.2 Caso 2

Un croupier, in una serata, ottiene i seguenti numeri alla roulette:

#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X
1	30	21	24	41	21	61	13	81	18	101	24	121	14
2	5	22	13	42	32	62	1	82	0	102	34	122	20
3	9	23	8	43	21	63	8	83	17	103	28	123	33
4	1	24	24	44	36	64	1	84	18	104	32	124	21
5	3	25	17	45	36	65	17	85	35	105	25	125	25
6	27	26	35	46	34	66	26	86	30	106	20	126	16
7	28	27	9	47	6	67	11	87	26	107	6	127	35
8	26	28	24	48	24	68	14	88	2	108	26	128	16
9	21	29	28	49	7	69	26	89	23	109	19	129	33
10	25	30	21	50	19	70	31	90	28	110	33	130	24
11	19	31	7	51	10	71	35	91	27	111	8		
12	33	32	28	52	4	72	25	92	4	112	22		
13	11	33	10	53	10	73	30	93	35	113	27		
14	20	34	12	54	19	74	11	94	25	114	3		
15	32	35	20	55	36	75	18	95	11	115	28		
16	17	36	17	56	11	76	7	96	24	116	27		
17	17	37	30	57	21	77	28	97	5	117	30		
18	20	38	29	58	25	78	15	98	33	118	29		
19	24	39	9	59	16	79	5	99	24	119	24		
20	36	40	23	60	17	80	16	100	26	120	9		

Se X descrive il valore ottenuto, di che tipo è la variabile aleatoria X? Quale è la sua media? Il croupier è onesto?

1.3 Caso 3

I bulbi di una particolare varietà di tulipani non sempre germogliano. Un floricoltore riceve una partita di bulbi numerati e rileva se un bulbo riesce a germogliare oppure no. Nella seguente tabella riporta l'identificativo del singolo bulbo e, con la variabile X, se il bulbo è germogliato (1) oppure no (0).

#	X	#	X	#	X	#	X
1	0	11	0	21	1	31	1
2	1	12	1	22	1	32	1
3	1	13	1	23	1	33	0
4	1	14	1	24	1	34	1
5	1	15	1	25	1	35	1
6	1	16	1	26	1	36	0
7	1	17	1	27	1	37	0
8	1	18	1	28	1	38	1
9	1	19	1	29	0	39	1
10	0	20	1	30	0	40	1

Modellare la probabilità di germogliare per un bulbo di tale pianta.

1.4 Caso 4

In una stanza vengono installati 4 rilevatori anti-incendio, ognuno dei quali funziona con probabilità del 70% (i rilevatori funzionano in modo indipendente).

Vengono effettuate delle prove spostando una fiamma controllata (a diversa potenza) in diversi punti della stanza. Nella seguente tabella sono riportati i risultati di tali prove, usando la variabile X per contare il numero di sensori che vengono attivati.

#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X
1	2	16	4	31	3	46	2	61	1	76	4	91	3	106	2
2	2	17	3	32	2	47	3	62	4	77	2	92	3	107	3
3	2	18	4	33	3	48	3	63	3	78	4	93	4	108	3
4	2	19	3	34	3	49	3	64	3	79	3	94	2	109	2
5	3	20	3	35	2	50	3	65	4	80	2	95	2	110	2
6	3	21	2	36	3	51	3	66	3	81	2	96	3		
7	1	22	3	37	3	52	2	67	3	82	3	97	4		
8	3	23	3	38	3	53	2	68	2	83	3	98	2		
9	3	24	3	39	3	54	3	69	3	84	4	99	3		
10	3	25	3	40	2	55	3	70	4	85	2	100	3		
11	4	26	3	41	3	56	3	71	3	86	4	101	2		
12	2	27	4	42	4	57	4	72	4	87	3	102	3		
13	3	28	3	43	3	58	4	73	4	88	3	103	3		
14	2	29	4	44	2	59	2	74	3	89	4	104	3		
15	3	30	2	45	3	60	4	75	2	90	2	105	3		

Che tipo di variabile aleatoria è X? Qual'è la probabilità che almeno 3 sensori siano attivi in presenza di fiamma?

1.5 Caso 5

Nella seguente tabella sono riportati il numero di mancini, presenti in classi di 10 persone:

#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X
1	1	16	2	31	2	46	4	61	1	76	1	91	1	106	3
2	3	17	1	32	2	47	2	62	1	77	3	92	3	107	0
3	3	18	1	33	2	48	1	63	4	78	1	93	0	108	2
4	1	19	2	34	2	49	3	64	3	79	3	94	3	109	3
5	3	20	1	35	0	50	0	65	1	80	2	95	3	110	2
6	2	21	4	36	2	51	1	66	1	81	1	96	1	111	1
7	3	22	3	37	2	52	1	67	2	82	3	97	0	112	1
8	1	23	1	38	3	53	2	68	2	83	4	98	0	113	3
9	0	24	2	39	3	54	3	69	1	84	3	99	2	114	1
10	1	25	1	40	1	55	2	70	2	85	2	100	3	115	2
11	1	26	3	41	4	56	1	71	1	86	1	101	1	116	0
12	3	27	2	42	0	57	2	72	2	87	3	102	3	117	0
13	3	28	3	43	2	58	0	73	2	88	2	103	3	118	4
14	1	29	3	44	1	59	3	74	1	89	5	104	0	119	3
15	0	30	1	45	1	60	5	75	1	90	3	105	2	120	3

Che tipo di variabile aleatoria è X? Quale è la probabilità che ci siano almeno 3 mancini in una classe da 10 persone?

1.6 Caso 6

Nella seguente tabella, la variabile X riporta il numero di giorni consecutivi senza pioggia di una città.

#	X	#	X	#	X	#	X	#	X
1	2	11	1	21	10	31	1	41	3
2	15	12	1	22	11	32	0	42	5
3	6	13	0	23	0	33	2	43	2
4	3	14	0	24	2	34	1	44	0
5	3	15	0	25	6	35	16	45	1
6	0	16	0	26	3	36	1	46	8
7	2	17	2	27	4	37	0	47	5
8	0	18	1	28	2	38	0	48	7
9	1	19	0	29	9	39	2	49	3
10	0	20	6	30	5	40	0	50	17

Quale è la probabilità di pioggia nella città in questione?

1.7 Caso 7

Nella seguente tabella, la variabile X riporta il numero di ore di funzionamento continuo di una lampadina.

#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X
1	1042	11	960	21	1313	31	571	41	2222	51	912
2	1506	12	1499	22	580	32	1275	42	867	52	1665
3	896	13	1286	23	1233	33	1339	43	1187	53	678
4	819	14	1445	24	965	34	1314	44	1163	54	1005
5	1510	15	1215	25	1804	35	638	45	1743	55	1061
6	1887	16	871	26	1925	36	833	46	956	56	1542
7	1624	17	1143	27	1531	37	1551	47	1042	57	1348
8	897	18	1342	28	1124	38	1000	48	499	58	1051
9	1481	19	1303	29	1083	39	1163	49	1447	59	752
10	906	20	1128	30	1384	40	1487	50	1436	60	1361

Quale è la probabilità che una lampadina duri almeno 1500 ore?

1.8 Caso 8

Un direttore di un negozio tiene traccia del numero di persone che visitano il suo negozio ogni ora e li riporta nella seguente tabella (variabile X):

#	X	#	X	#	X	#	X	#	X
1	1	17	0	33	6	49	5	65	6
2	5	18	4	34	3	50	9	66	5
3	9	19	6	35	2	51	5	67	6
4	5	20	5	36	5	52	6	68	6
5	4	21	3	37	2	53	1	69	2
6	3	22	4	38	4	54	2	70	4
7	4	23	5	39	4	55	3	71	1
8	3	24	3	40	4	56	2	72	1
9	2	25	4	41	4	57	4	73	4
10	6	26	4	42	1	58	4	74	2
11	1	27	4	43	6	59	2	75	5
12	9	28	2	44	5	60	3	76	7
13	7	29	2	45	7	61	1	77	7
14	4	30	4	46	3	62	5	78	9
15	7	31	3	47	5	63	0	79	2
16	1	32	4	48	8	64	7	80	3

Quale è la probabilità che in un'ora il negozio venga visitato da 8 persone?

1.9 Caso 9

Nella seguente tabella, la variabile X rappresenta il tempo di evasione di una chiamata di un centralinista di un call center:

#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X
1	0.0938	16	0.0514	31	0.0155	46	0.0806	61	0.0259	76	0.0816
2	0.0687	17	0.1203	32	0.0300	47	0.0038	62	0.0584	77	0.0953
3	0.0058	18	0.0081	33	0.0124	48	0.0620	63	0.0038	78	0.0284
4	0.1582	19	0.0006	34	0.0719	49	0.1345	64	0.0060	79	0.0408
5	0.0200	20	0.0390	35	0.0021	50	0.0874	65	0.0139	80	0.0134
6	0.0400	21	0.0025	36	0.0333	51	0.0219	66	0.1463	81	0.0396
7	0.0029	22	0.0190	37	0.0685	52	0.0131	67	0.0126	82	0.0198
8	0.1119	23	0.0201	38	0.0122	53	0.0507	68	0.0098	83	0.0038
9	0.1374	24	0.0167	39	0.1343	54	0.0260	69	0.0590	84	0.0016
10	0.0939	25	0.0012	40	0.0029	55	0.0462	70	0.0314	85	0.0843
11	0.0214	26	0.0193	41	0.0296	56	0.0083	71	0.0074	86	0.1155
12	0.0039	27	0.0153	42	0.0451	57	0.0036	72	0.0020	87	0.0350
13	0.0631	28	0.0772	43	0.0097	58	0.0795	73	0.0488	88	0.0563
14	0.0070	29	0.0266	44	0.0165	59	0.2588	74	0.0803	89	0.0753
15	0.0759	30	0.0226	45	0.0397	60	0.0653	75	0.0227	90	0.0323

Quante chiamate all'ora evade mediamente questo centralinista?

1.10 Caso 10

Nella seguente tabella, la variabile X rappresenta il tempo di lavoro fra due guasti di un macchinario (in anni):

#	X	#	X	#	X	#	X	#	X	#	X
1	0.3224	16	0.1668	31	0.0967	46	0.4009	61	0.3981	76	0.8365
2	0.0003	17	0.6425	32	0.2421	47	0.4228	62	0.3080	77	0.1483
3	0.1129	18	2.1010	33	0.0386	48	0.9137	63	0.3214	78	0.2925
4	0.6687	19	0.1031	34	0.0066	49	0.2765	64	0.2621	79	0.5856
5	0.1065	20	0.4171	35	0.7662	50	0.3010	65	0.2983	80	0.4559
6	0.5094	21	0.3266	36	2.1052	51	0.3308	66	0.3513	81	3.3622
7	0.1692	22	0.6414	37	0.2694	52	0.8475	67	0.4634	82	0.1741
8	0.0918	23	0.2243	38	0.0824	53	0.0198	68	0.3867	83	0.0741
9	0.5497	24	0.4336	39	0.0235	54	0.4044	69	0.2378	84	1.1974
10	0.1733	25	0.0484	40	0.0373	55	0.6971	70	0.5027	85	0.5697
11	0.1952	26	0.1405	41	1.8850	56	0.2589	71	0.4349	86	0.0495
12	0.7561	27	0.3242	42	0.3147	57	0.1124	72	0.0287	87	0.2169
13	2.0812	28	0.2068	43	0.9916	58	0.7819	73	0.4180	88	0.5927
14	0.3500	29	1.6559	44	0.4304	59	0.0173	74	0.1971	89	0.1758
15	0.8084	30	1.1654	45	0.4934	60	0.6562	75	0.3720	90	0.0040

Quale è la probabilità che lavori per tutto un anno senza guastarsi neanche una volta?

2 Soluzioni

Nel seguito vengono riportate alcune tracce utili per svolgere i problemi esposti nel capitolo precedente.

2.1 Caso 1

Dalla descrizione del problema, si può ipotizzare che la dimensione delle particelle, X, si possa modellare con una variabile uniformemente distribuita tra 1 e 3 (mm).

I dati forniti posso essere utilizzati per tracciare un istogramma ch dovrebbe confermare questa ipotesi.

In tal caso, la media di X sarà 2 (mm). Verificare che la media campionaria si avvicini a tale valore.

2.2 Caso 2

I numeri di una roulette hanno tutti la stessa probabilità di uscire. Quindi, se non intervengono brogli, il valore uscito da una roulette sarà modellabile tramite una variabile uniforme continua, con valori nell'intervallo $[0, \ldots, 36]$.

Poiché i valori includono lo 0, la media sarà $(36 + 0)/2 = 18$.

2.3 Caso 3

La vitalità del bulbo può essere modellata tramite una Bernoulliana. Il parametro caratteristico (la probailità di successo) può essere stimato tramite la media campionaria.

2.4 Caso 4

La variabile X dovrebbe essere una variabile binomiale con $p = 0.7$ e $n = 4$.

L'istogramma dovrebbe confermare questa ipotesi.

2.5 Caso 5

La probabilità di essere mancino può essere modellata tramite una Bernoulliana. Il numero di mancini in un gruppo di persone può quindi essere modellato con una binomiale.

Nel caso in esame, il parametro n della binomiale sarà 10. Poiché la media di una binomiale vale np, il parametro p può essere stimato mediante la media campionaria.

2.6 Caso 6

La probabilità che piova può essere modellata tramite una Bernoulliana. La distribuzione Geometrica modella il numero di fallimenti prima di un successo. Quindi, nel caso in esame, una distribuzione geometrica può essere usata per modellare il numero di giorni consecutivi senza pioggia.

La media di una distribuzione geometrica è $p/(1-p)$. Quindi, dalla media campionaria di X si può stimare la probabilità di pioggia.

2.7 Caso 7

La durata di una lampadina dipende da molti fattori. Per questo motivo, può essere verosimilmente modellata tramite una distribuzione normale. L'istogramma dei dati dovrebbe confermare questa ipotesi.

I parametri μ e σ^2 possono essere stimati tramite gli indicatori media campionaria e varianza campionaria.

2.8 Caso 8

Questo caso può essere modellato tramite una Poissoniana con parametro temporale t pari a 1 (ora).

La media campionaria di X stima la media che è pari a vt e può quindi essere usata per stimare v.

2.9 Caso 9

La presenza di una chiamata può essere modellata tramite una variabile Poissoniana. La durata della chiamata può quindi essere modellata tramite una distribuzione esponenziale.

La media campionaria ottenuta dai dati è una stima di $1/v$ e può quindi essere usata per stimare il parametro v.

2.10 Caso 10

Un guasto può essere modellato tramite una poissoniana. Quindi, l'intervallo di tempo tra due guasti può essere modellato con una distribuzione esponenziale.

La media campionaria dei dati fornisce una stima di $1/v$, e, quindi, del parametro v.