Modelli descrittivi, statistica e simulazione

Master per Smart Logistics specialist

Roberto Cordone
(roberto.cordone@unimi.it)

Teoria della probabilità

Un fenomeno è

- deterministico quando a pari condizioni, produce identici risultati
  (*ad es., lasciar cadere un sasso, percorrere una strada vuota...*)
- non deterministico quando a pari condizioni, può dare risultati diversi
  (*ad es., caricare un TIR, fare una strada trafficata, stare in coda...*)

La logistica è ricchissima di fenomeni non deterministici, che sarebbe utile descrivere e prevedere per poter prendere decisioni efficaci

La teoria della probabilità studia i fenomeni non deterministici

- per estrarne informazione
- utile a prevederli e controllarli

Terminologia

Definiamo esperimento aleatorio il fenomeno non deterministico in esame

- esiti ω sono i singoli risultati elementari possibili per l'esperimento
- spazio campione (o spazio campionario) Ω è l'insieme di tutti gli esiti

Esempi:

- esperimento: lancio di una moneta, di un dado, l'attesa dell'autobus, un trasporto di materiali, la produzione di un pezzo, ...
- esiti: testa o croce, 1 o 2...o 6, il numero di minuti di attesa, la durata del trasporto, la qualità del pezzo, ...
- spazio campionario: $\{T, C\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri reali non negativi $\mathbb{R}^+$, la scala $\{A, \ldots, E\}$, ...

Lo spazio campione può essere

- finito se gli esiti sono in numero finito;
- infinito numerabile se sono infiniti, ma associati ai numeri naturali
- continuo se gli esiti corrispondono a uno o più intervalli di valori

La distinzione è in parte convenzionale e dipende dalla misura

Eventi

Un evento $E \subseteq \Omega$ è qualsiasi sottoinsieme dello spazio campione

- evento semplice (o elementare) è costituito da un solo esito

$$E = \{\omega\} \Leftrightarrow |E| = 1$$

- evento composto è costituito da più esiti distinti:
  un evento composto si può scomporre in eventi semplici.

Un evento E "si verifica" quando l'esito ω dell'esperimento cade in esso

- evento certo è l'intero insieme degli esiti ($E = \Omega$): si verifica sempre;
- evento impossibile è l'insieme vuoto ($E = \emptyset$): non si verifica mai.

Esempi: nel lancio di un dado

- evento semplice: esce 2 ($E = \{2\}$)
- evento composto: esce un numero pari ($E = \{2, 4, 6\}$)
- evento certo: esce un numero positivo ($E = \Omega$)
- evento impossibile: esce 10 ($E = \emptyset$)

(*Vedi Esercizio 3-1*)

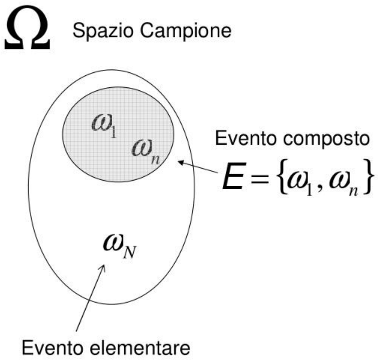
Relazione con la statistica descrittiva

In statistica descrittiva abbiamo visto concetti analoghi

- la popolazione è un insieme di misure, come lo spazio campione;
- le unità statistiche sono singole misure, come gli esiti;
- i campioni sono sottoinsiemi di misure, come gli eventi.

Vedremo che l'analogia si spinge molto oltre

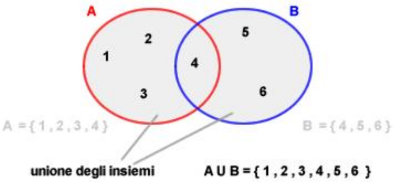
Gli eventi si rappresentano con i classici diagrammi di Venn per gli insiemi



Aiutano molto a ricordare le formule relative al calcolo della probabilità

Unione di eventi

Evento unione $E = A \cup B$ di due eventi A e B è l'evento che si verifica quando si verifica almeno uno dei due eventi (o anche entrambi)

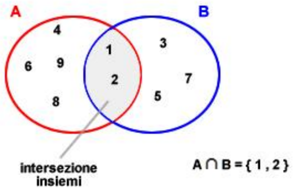


Proprietà

- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$

Intersezione di eventi

Evento intersezione $E = A \cap B$ di due eventi A e B è l'evento che si verifica quando si verificano entrambi gli eventi



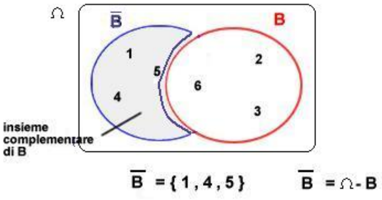
Proprietà

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap \Omega = A$

(*Vedi Esercizio 3-1*)

Evento complementare

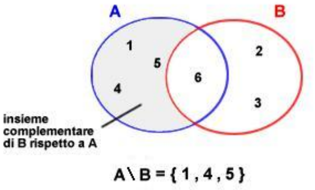
Evento complementare $\bar{E}$ di un evento E è l'evento che si verifica esattamente quando non si verifica l'evento dato



Proprietà

- $E \cup \bar{E} = \Omega$
- $E \cap \bar{E} = \emptyset$
- $\bar{\Omega} = \emptyset$
- $\bar{\emptyset} = \Omega$

Evento differenza $E = A \setminus B$ di due eventi A e B è l'evento che si verifica quando si verifica il primo, ma non il secondo evento

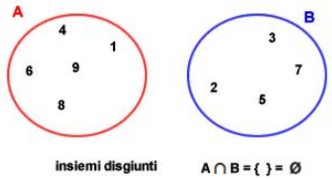


Proprietà

- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus \Omega = \emptyset$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- $\Omega \setminus A = \bar{A}$

Eventi incompatibili

Due eventi A e B si dicono incompatibili o mutuamente esclusivi quando non possono verificarsi entrambi ovvero quando non hanno esiti comuni



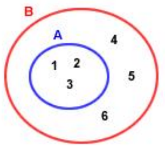
Ovviamente, due eventi non incompatibili si dicono compatibili

Proprietà

- l'evento impossibile è incompatibile con qualsiasi evento
- l'evento certo è compatibile con qualsiasi evento non impossibile
- qualsiasi evento è incompatibile con il proprio evento complementare
- tutti gli eventi semplici sono incompatibili a coppie

Inclusione fra eventi

Un evento A è incluso in un evento B ($A \subseteq B$) quando
tutte le volte in cui si verifica A, si verifica anche B



$A \subseteq B$

$A = \{1, 2, 3\}$

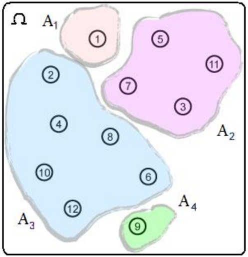
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Proprietà

- qualsiasi evento è incluso nell'evento certo: $E \subseteq \Omega$ per ogni E;
- l'evento impossibile è incluso in qualsiasi evento: $\emptyset \subseteq E$ (per convenzione);
- la differenza fra due eventi è inclusa nel primo evento: $(A \setminus B) \subseteq A$.

Partizione di uno spazio campione

Una partizione di uno spazio campione è una collezione di eventi incompatibili la cui unione coincide con l'intero spazio campione



$$P = (A_1, \ldots, A_r) \text{ con } \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{r} A_i = \Omega \\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per ogni } i \neq j \end{cases}$$

Ad esempio, gli eventi elementari formano una partizione

Praticamente, è un elenco di tutti i casi possibili, raccolti in gruppi

Probabilità

La teoria della probabilità consiste nel

- definire per ogni evento E un numero p_E
  che misuri la probabilità che l'evento si verifichi

Se ne discute dal XVII secolo, ma ancora non esiste un'impostazione che sia del tutto soddisfacente e unanimemente condivisa

Gli approcci principali alla definizione di probabilità sono:

1. la teoria classica, basata sugli studi di Pascal e Laplace
2. la teoria frequentista, basata sugli studi di Von Mises, Reichenbach, Castelnuovo
3. la teoria soggettivista, basata sugli studi di De Finetti, Ramsey, Savage
4. la teoria assiomatica, basata sugli studi di Kolmogorov

Teoria classica

Definisce la probabilità di un evento E come il numero di casi in cui si verifica diviso il numero di casi totale

$$p(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Vantaggi

- è una definizione chiara
- è una definizione operativa, cioè direttamente applicabile
- si può estendere ai casi infiniti, numerabile e continuo

Svantaggi

- presuppone di conoscere tutti i casi possibili
- presuppone che tutti i casi possibili siano equiprobabili

Vale bene per i giochi e altre situazioni perfettamente controllate

Teoria classica: esempio

Estraendo una carta da un mazzo da 52, qual è la probabilità che non sia una figura di quadri?

I casi in cui si verifica l'evento sono

- $3 \cdot 13 = 39$ carte con seme diverso da quadri
- 10 carte di quadri che non sono figure

per un totale di

$$p(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 13 + 10}{52} = \frac{49}{52}$$

Teoria classica: difficoltà

Vi sono molte situazioni in cui gli esiti possibili non sono tutti noti

Quanto può durare al massimo una coda?

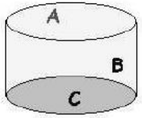
Vi sono molte situazioni in cui gli esiti possibili non sono equiprobabili

Esempi: il "cigno nero", la "scommessa di Pascal", il dado cilindrico

Lanciando un dado cilindrico, gli esiti sono tre:

1. faccia superiore
2. faccia inferiore
3. superficie laterale

ma non sono equiprobabili, e non è ovvio che probabilità abbiano



La teoria classica non risponde a queste difficoltà

Teoria frequentista

Definisce la probabilità di un evento E come il valore limite del rapporto fra il numero di ripetizioni dell'esperimento nei quali l'evento si verifica e il numero totale di ripetizioni (frequenza assoluta)

$$p(E) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n_E}{n_\Omega}$$

Vantaggi

- è una definizione chiara
- dà un metodo sperimentale e ripetibile per generare le probabilità

Svantaggi

- presuppone di ripetere indefinitamente l'esperimento (può essere impossibile o troppo costoso)
- presuppone che la frequenza tenda a un valore limite stabile (e chi lo assicura? dopo quante prove comincia la convergenza?)
- la stima è molto incerta per i fenomeni rari

Teoria soggettivista

Definisce la probabilità di un evento E come il grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce al suo verficarsi

$$p(E) = \text{somma massima che si è disposti a giocare per vincere 1 se l'evento si verifica}$$

Vantaggi

- consente di definire la probabilità in situazioni in cui le altre definizioni non valgono (ad es., finanza)

Svantaggi

- i valori di probabilità cambiano da un individuo a un altro

Teoria assiomatica

La teoria assiomatica non fornisce un metodo per definire $p(E)$

La teoria assiomatica si limita a

- elencare i concetti base di esperimento, esito, spazio campionario, evento;
- enunciare assiomi, cioè proprietà che la probabilità deve rispettare;
- dimostrare teoremi, cioè altre proprietà che la probabilità certamente rispetta.

Vantaggi

- qualsiasi definizione rispetti gli assiomi, rispetta anche i teoremi
- i valori di probabilità non possono avere comportamenti "strani"

Svantaggio

- la teoria non dice quanto deve valere la probabilità
  (*ci si deve affidare ad altri campi per produrre i numeri dettagliati*)

Assiomi

1. Positività: ogni evento ha probabilità non negativa

$$p(E) \geq 0 \text{ per ogni } E \subseteq \Omega$$

2. Certezza: l'evento certo ha probabilità unitaria

$$p(\Omega) = 1$$

3. Unione: la probabilità dell'unione di due eventi incompatibili è la somma delle probabilità dei due eventi

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \text{ per ogni } A, B \subseteq \Omega : A \cap B = \emptyset$$

La definizione classica e quella frequentista rispettano gli assiomi

- $|E|/|\Omega| \geq 0$, $|\Omega|/|\Omega| = 1$ e $|A \cup B|/|\Omega| = |A|/|\Omega| + |B|/|\Omega|$;
- $n_E/n_\Omega \geq 0$, $n_\Omega/n_\Omega = 1$ e $n_{A \cup B}/n_\Omega = n_A/n_\Omega + n_B/n_\Omega$.

Per la definizione soggettivista, dipende dal soggetto

Proprietà

Dagli assiomi derivano una serie di proprietà utili

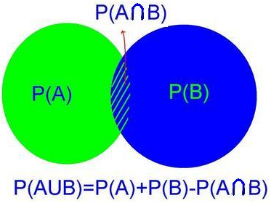
L'assioma dell'unione permette di calcolare la probabilità di ogni evento sommando le probabilità degli eventi elementari che lo compongono

$$p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\{\omega\}) \text{ per ogni } A \subseteq \Omega$$

(*Vedi Esercizio 3-2*)

La probabilità dell'unione di due eventi qualsiasi (anche compatibili) è

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



(*Vedi Esercizio 3-3*)

Il terzo termine evita di contare due volte i casi nell'intersezione

Proprietà

La probabilità dell'evento complementare è

$$p\left(\bar{A}\right) = 1 - p\left(A\right) \text{ per ogni } A \subseteq \Omega$$

La probabilità di ogni evento è non superiore a 1

$$p\left(\bar{A}\right) \leq 1 \text{ per ogni } A \subseteq \Omega$$

La probabilità dell'evento differenza è

$$p\left(A \setminus B\right) = p\left(A\right) - p\left(A \cap B\right) \text{ per ogni } A, B \subseteq \Omega$$

La probabilità di un evento incluso in un altro è più bassa

$$p\left(A\right) \leq p\left(B\right) \text{ per ogni } A \subseteq B \subseteq \Omega$$

(*Vedi Esercizio 3-4, Esercizio 3-5 ed Esercizio 3-6*)