

# Costruzione di una porta *AND* attraverso il *3-Colouring*

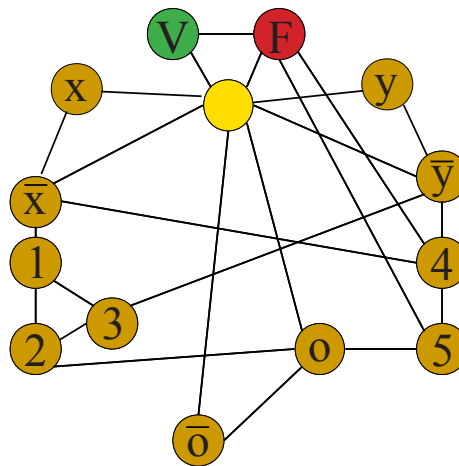
29 marzo 2005

Noti i *Gadget* che realizzano porte *NOT* e *OR*, è facile combinarli per ottenere una porta *AND*:

$$(\text{NOT } (x \text{ AND } y)) = (\text{NOT } x) \text{ OR } (\text{NOT } y)$$

Si noti che la costruzione prende le mosse da una porta *OR* e

- vi aggiunge una porta *NOT* prima di ciascun ingresso
- sposta l'uscita in un vertice adiacente al vertice giallo e all'uscita della porta *OR*, in modo da negare quest'ultima



**Dimostrazione della correttezza** Anzi tutto, i vertici adiacenti a  $x$  e  $y$  contengono necessariamente il valore logico opposto, dato che sono anche adiacenti al vertice neutro (giallo).

Se una variabile fra  $x$  e  $y$  è falsa, allora

1. uno dei vertici fra  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  è di colore vero
2. il vertice 4 è neutro, dato che è adiacente a un vertice vero e a uno falso
3. il vertice 5 è vero, dato che è adiacente a un vertice neutro e a uno falso
4. il vertice  $o$  è falso, dato che è adiacente a un vertice neutro e a uno vero

5. gli altri vertici si possono 3-colorare

Se  $x$  e  $y$  sono entrambe vere, allora

1. i vertici  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono entrambi falsi

2. i vertici 1 e 3 non sono veri, e sono di due colori diversi: quindi, uno è vero e l'altro è neutro

3. il vertice 2 è falso, dato che è adiacente a un vertice neutro e uno vero

4. il vertice  $o$  è vero, dato che è adiacente a un vertice neutro e uno falso

5. gli altri vertici si possono 3-colorare

Questa non è la soluzione minimale: è evidente, infatti, che il vertice  $\bar{o}$  non svolge alcuna funzione, e si può eliminare.