Esercizi sulle sommatorie

Roberto Cordone

Data un'istanza di dimensione n, un algoritmo iterativo si compone di

1. un passo iniziale, di complessità $T_{in}(n)$;

2. un passo iterativo ripetuto più volte (al massimo $i_{\max}$ volte, la cui complessità $T^{(i)}(n)$ dipende in genere da n, ma anche dall'iterazione i-esima;

3. un passo finale, di complessità $T_{fin}(n)$, che negli algoritmi più semplici spesso manca.

La sua complessità totale è quindi pari a

$$T(n) = T_{in}(n) + \sum_{i=1}^{i_{\max}} T^{(i)}(n) + T_{fin}(n)$$

e per valutarla occorre conoscere $T_{in}(n)$, $i_{\max}$, $T^{(i)}(n)$ e $T_{fin}(n)$ e saper calcolare la sommatoria. Nel seguito, per semplicità e per assumere una notazione più matematica e meno legata all'applicazione algoritmica, indicheremo $T^{(i)}(n)$ con $f(i)$ e $i_{\max}$ con n. Inoltre, considereremo sommatorie estese da 0 a n. Dato che ci interessa l'andamento asintotico della soluzione, che la sommatoria parta da 0, da 1 o da qualsiasi valore assegnato non cambia nulla.

Dai lucidi del corso, sappiamo che la stragrande maggioranza delle funzioni $f(i)$ ricadono in una delle seguenti quattro categorie:

1. funzioni *rapidamente crescenti*, per le quali

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) \in \Theta(f(n))$$

2. funzioni *lentamente crescenti*, per le quali

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) \in \Theta(nf(n))$$

3. funzioni *lentamente decrescenti*, per le quali

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) \in \Theta(nf(n))$$

4. funzioni *rapidamente decrescenti*, per le quali

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) \in \Theta(1)$$

Una buona regola intuitiva per riconoscere in quale caso ci si trovi è determinare il termine prevalente della funzione (quello che cresce più in fretta o cala meno in fretta) e ricordarsi che

- per le funzioni crescenti:
  - quelle esponenziali crescono rapidamente
  - quelle polinomiali crescono lentamente
- per le funzioni decrescenti
  - quelle che calano meno di $1/i$ calano lentamente
  - quelle che calano più di $1/i$ calano rapidamente

Se vogliamo però essere certi del risultato, occorre dimostrarlo. A tale scopo, possiamo servirci delle seguenti *condizioni sufficienti*. Il fatto che siano sufficienti indica che, anche se non sono verificate, la funzione potrebbe comunque cadere nella classe a cui sono associate. Quindi, non costituiscono la soluzione a tutti i problemi, ma solo un aiuto. In casi complessi, dove tutte le condizioni che seguono sono false (o non si riesce a dimostrare che sono vere), bisogna ricorrere ad altri metodi di somma, come quello per integrazione.

Funzioni rapidamente crescenti

$$\exists \epsilon > 0, i_0 \in \mathbb{N} : \frac{f(i+1)}{f(i)} \geq 1 + \epsilon \qquad \text{per ogni } i \geq i_0$$

Esempio 1

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} 2^i i \log i$$

La presenza dell'esponenziale fa intuire che cadiamo in questa categoria. Ad ogni modo, valutiamo il rapporto fra due valori consecutivi di f:

$$\frac{f(i+1)}{f(i)} = \frac{2^{i+1}(i+1)\log(i+1)}{2^i i \log i} = 2\left(1+\frac{1}{i}\right)\frac{\log(i+1)}{\log i}$$

Ovviamente, questo rapporto è > 2, dato che $1/i > 0$ e $\log(i+1) > \log i$, poiché il logaritmo è una funzione monotona crescente. Di conseguenza, $\epsilon = 1$ è un valore accettabile e non c'è bisogno di fissare i_0: qualsiasi valore va bene.

Se preferiamo una via più ottusa, possiamo far ricorso alle proprietà dei limiti.

$$\lim_{i\to\infty}\frac{f(i+1)}{f(i)} = \lim_{i\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{i}\right)\frac{\log(i+1)}{\log i} = 2\lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{1}{i}\right)\lim_{i\to\infty}\frac{\log(i+1)}{\log i}$$

Il primo limite è banalmente 1, come pure il secondo, grazie al teorema di De l'Hôpital

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log(i+1)}{\log i} = \lim_{i\to\infty}\frac{\frac{1}{i+1}}{\frac{1}{i}} = \lim_{i\to\infty}\frac{i}{i+1} = 1$$

La definizione di limite ci porta a concludere che, se $f(i+1)/f(i)$ ha limite pari a 2 per $i \to \infty$, allora scegliendo a piacere $\delta > 0$ si può ottenere che $2 - \delta \leq f(i+1)/f(i) \leq 2 + \delta$ per ogni i abbastanza grosso. Posto $\delta = 1/2$, questa proprietà ci dice che $f(i+1)/f(i) \geq 3/2$, e quindi vale la tesi (basta porre $\epsilon = 1/2$).

Ne concludiamo che

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} 2^i i \log i \in \Theta(f(n)) = \Theta(2^n n \log n)$$

Funzioni lentamente crescenti: prima condizione

$$\exists \alpha \in (0;1), \beta > 0 : f(\alpha n) \geq \beta f(n)$$

Esempio 1

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{\log i}$$

È abbastanza facile intuire che qusta funzione cresca lentamente, dato che cresce meno ancora di una funzione lineare. Verifichiamolo, valutando ancora il rapporto fra due valori di f, questa volta non consecutivi, ma ben distanziati. La condizione richiede che il primo valore non sia troppo piccolo rispetto al secondo.

$$\frac{f\left(\alpha n\right)}{f\left(n\right)} = \frac{\dfrac{\alpha n}{\log \alpha n}}{\dfrac{n}{\log n}} = \alpha \frac{\log n}{\log n + \log \alpha}$$

Ora si noti che $\alpha \in (0;1)$, per cui $\log \alpha < 0$. Per garantire che il denominatore sia positivo, prendiamo un valore di α non troppo piccolo (ad esempio, $1/2$), così che $\log n + \log \alpha = \log n - 1$, che è positivo (per $n \geq 3$), ma più piccolo di $\log n$. Quindi

$$\frac{f\left(\alpha n\right)}{f\left(n\right)} = \alpha \frac{\log n}{\log n - 1} > \alpha$$

Per ottenere che questa espressione sia $\geq \beta$, basta porre $\beta = \alpha$. Quindi si può rendere vera la condizione.

Esempio 2

$$T\left(n\right) = \sum_{i=0}^{n} f\left(i\right) = \sum_{i=0}^{n} \sqrt[3]{i}$$

Trattandosi di un polinomio, è facile intuire che cresca lentamente. Verifichiamolo, valutando ancora il rapporto fra due valori di f, questa volta non consecutivi, ma ben distanziati: il primo non deve essere troppo piccolo.

$$\frac{f\left(\alpha n\right)}{f\left(n\right)} = \frac{\sqrt[3]{\alpha i}}{\sqrt[3]{i}} = \sqrt[3]{\alpha}$$

È chiaro che esiste una coppia di valori α e β per cui

$$\frac{f\left(\alpha n\right)}{f\left(n\right)} \geq \beta$$

Ce ne sono anzi infinite: basta scegliere α qualsiasi in $(0;1)$ e porre $\beta = \sqrt[3]{\alpha}$.

Se ne deduce che

$$T\left(n\right) = \sum_{i=0}^{n} \sqrt[3]{i} \in \Theta\left(nf\left(n\right)\right) = \Theta\left(n\sqrt[3]{n}\right) = \Theta\left(n^{4/3}\right)$$

Funzioni lentamente crescenti: seconda condizione

$$\exists \epsilon \geq 1 : f\left(i\right) \in \Theta\left(i^{\epsilon-1}\right)$$

Si noti che questa condizione non vale per il primo esempio visto in precedenza, dato che $i/\log i$ non appartiene a $\Theta\left(i^{\epsilon-1}\right)$ per nessun valore di ϵ. Infatti, $i/\log i$ cresce più lentamente di i, ma più velocemente di qualsiasi potenza di i con esponente minore di 1.

Esempio:

$$T\left(n\right) = \sum_{i=0}^{n} f\left(i\right) = \sum_{i=0}^{n} \sqrt[3]{i}$$

Questo esempio è il secondo visto prima, e soddisfa entrambe le condizioni. Infatti, per $\epsilon = 4/3$ risulta

$$\epsilon = 4/3 \Rightarrow f\left(i\right) = i^{1/3} = i^{4/3-1} = i^{\epsilon-1} \in \Theta\left(i^{\epsilon-1}\right)$$

Come sopra, se ne deduce che

$$T\left(n\right) = \sum_{i=0}^{n} \sqrt[3]{i} \in \Theta\left(nf\left(n\right)\right) = \Theta\left(n\sqrt[3]{n}\right) = \Theta\left(n^{4/3}\right)$$

Funzioni lentamente decrescenti

La condizione è la stessa di prima, ma ϵ assume valori minori di 1 anziché maggiori

$$\exists \epsilon \in (0;1] : f\left(i\right) \in \Theta\left(i^{\epsilon-1}\right)$$

Esempio:

$$T\left(n\right) = \sum_{i=0}^{n} f\left(i\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{i^2}}$$

Questa volta, per $\epsilon = 1/3$ risulta

$$\epsilon = 1/3 \Rightarrow f\left(i\right) = i^{-2/3} = i^{1/3-1} = i^{\epsilon-1} \in \Theta\left(i^{\epsilon-1}\right)$$

Quindi

$$T\left(n\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{i^2}} \in \Theta\left(nf\left(n\right)\right) = \Theta\left(\frac{n}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = \Theta\left(\sqrt[3]{i}\right)$$

Funzioni rapidamente decrescenti: prima condizione

$$\exists \epsilon > 0, i_0 \in \mathbb{N} : \frac{f(i+1)}{f(i)} \leq \frac{1}{1+\epsilon} \qquad \text{per ogni } i \geq i_0$$

Esempio:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i^2 \log i}$$

Questa funzione non soddisfa la condizione. Infatti

$$\frac{f(i+1)}{f(i)} = \frac{\frac{1}{(i+1)^2 \log(i+1)}}{\frac{1}{i^2 \log i}} = \frac{i^2 \log i}{(i+1)^2 \log(i+1)} \not\leq 1 - \epsilon$$

dato che ha limite 1 per $i \to \infty$, e quindi per qualsiasi ϵ è compreso fra $1-\epsilon$ e $1+\epsilon$ per i grande.

Dobbiamo concludere che questa funzione non cala rapidamente? No, ma solo che la condizione non ci aiuta. Come vedremo in seguito, qui vale la seconda condizione.

Esempio:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

In questo caso, basta porre $\epsilon = 1/4$:

$$\frac{f(i+1)}{f(i)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{i+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^i} = \frac{3}{4} \leq 1 - \epsilon$$

Quindi

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^i \in \Theta(1)$$

Funzioni rapidamente decrescenti: seconda condizione

$$\exists \epsilon > 0 : f(i) \in O\left(i^{-1-\epsilon}\right)$$

Esempio:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i^2 \log i}$$

Torniamo a considerare l'esempio sul quale la prima condizione ha fallito. La seconda condizione è invece verificata. Infatti

$$\frac{1}{i^2 \log i} \in O\left(\frac{1}{i^2}\right) = O\left(i^{-2}\right)$$

che per $\epsilon = 1$ è $O(i^{-1-\epsilon})$.

Di conseguenza

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i^2 \log i} \in \Theta(1)$$

Esempio:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

Qui non è difficile mostrare che $f(i) \in O\left(i^{-k}\right)$ qualunque sia k, anche molto grande.

Funzioni non catalogate

Non dobbiamo dimenticare che rimangono funzioni non catalogate, comprese fra quelle a crescita lenta e quelle a crescita rapida, come pure fra quelle a calo lento e quelle a calo rapido. E ve ne sono altre (piuttosto anomale) distribuite un po' ovunque.

Esempio:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i \log i}$$

Questa funzione cala più rapidamente di i^{-1}, ma meno rapidamente di qualsiasi potenza $i^{-1-\epsilon}$. Quindi non soddisfa nessuna delle condizioni elencate.

In effetti, si può procedere per integrazione

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i \log i} \approx \int_{x=2}^{n} \frac{1}{x \log x} dx$$

Poniamo $y = \log x = \ln x / \ln 2$, da cui $dy = dx / (x \ln 2)$

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i \log i} \approx \int_{1}^{\log n} \frac{\ln 2}{y} dy = \ln 2 \int_{1}^{\log n} d \ln y = \ln 2 \left[\ln y \right]_{1}^{\log n} = \ln 2 \ln \log n = \log \log n$$