ESERCIZI DI FORMALIZZAZIONE: funzioni

Funzioni Parziali

Definizione: Siano A e B due insiemi, una *funzione parziale* $F : A \to B$ è un insieme di coppie $\langle a, b\rangle$ (con $a \in A$ e $b \in B$) in cui ogni elemento di A è in coppia con al più un elemento di B.

Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$

Funzioni Totali

Definizione: Siano A e B due insiemi, una *funzione totale* $F : A \to B$ è una funzione parziale che associa ad ogni elemento di A un elemento di B.

Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$
$$\wedge$$
$$\forall a \in A(\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \qquad \text{(associa ad ogni elemento di } A \text{ uno di } B)$$
$$\equiv$$
$$\forall a \in A(\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \qquad \text{(funz. totale)}$$

Funzioni Iniettive

Definizione: Una funzione parziale $F : A \to B$ è *iniettiva* se per ogni $b \in Im(F)$ esiste al più un a tale che $\langle a, b\rangle \in F$.

Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$
$$\wedge$$
$$\forall b \in B((\exists a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(iniettività)}$$

Funzioni Suriettive

Definizione: Una funzione parziale $F : A \to B$ è *suriettiva* se $Im(F) = B$.
Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$
$$\wedge$$
$$\forall b \in B(\exists a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F) \qquad \text{(suriettività)}$$

Funzioni Biiettive

Definizione: Una funzione parziale $F : A \to B$ è *biiettiva* se è totale, iniettiva e suriettiva.

Formalizzazione:

$\forall a \in A(\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F)$ (funz. totale)
$\wedge$
$\forall b \in B((\exists a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F))$ (iniettività)
$\wedge$
$\forall b \in B(\exists a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F)$ (suriettività)

$\equiv$

$\forall a \in A(\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F)$ (funz. totale)
$\wedge$
$\forall b \in B(\exists! a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F)$ (iniettività e suriettività)

Logica Matematica: Esercizi su Sequenti e Deduzione Naturale

Esercizio 1. Dimostrare con il calcolo dei Sequenti e con la Deduzione Naturale che la seguente formula è derivabile:

$$((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (B \wedge C))$$

Soluzione:

Sequenti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, B, C \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B}{A, B, C \vdash B} \qquad \dfrac{C \vdash C}{A, B, C \vdash C}}{A, B, C \vdash B \wedge C}}{A, B, C \vdash A \wedge (B \wedge C)}}{(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)}}{\vdash ((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (B \wedge C))}$$

Deduzione Naturale:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \wedge B) \wedge C]}{A \wedge B}}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \wedge B) \wedge C]}{A \wedge B}}{B} \qquad \dfrac{[(A \wedge B) \wedge C]}{C}}{B \wedge C}}{A \wedge (B \wedge C)}}{((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (B \wedge C))}\ [\text{ipotesi sussidiaria: } (A \wedge B) \wedge C]$$

Esercizio 2. Dimostrare con il calcolo dei Sequenti e con la Deduzione Naturale che la seguente formula è derivabile:

$$(A \Rightarrow \sim A) \Rightarrow \sim A$$

Soluzione:

Sequenti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\sim A \vdash \sim A} \qquad \dfrac{A \vdash A}{\vdash A, \sim A}}{(A \Rightarrow \sim A) \vdash \sim A}}{\vdash (A \Rightarrow \sim A) \Rightarrow \sim A}$$

Deduzione Naturale:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \qquad \dfrac{[A \Rightarrow \sim A] \qquad [A]}{\sim A}}{F}}{\sim A}\ [\text{ipotesi sussidiaria: } A]}{(A \Rightarrow \sim A) \Rightarrow \sim A}\ [\text{ipotesi sussidiaria: } A \Rightarrow \sim A]$$

Esercizio 3. Provare che $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$.

Soluzione:

Sequenti:

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash A, B}}{\vdash A, A \Rightarrow B}}{((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \vdash A}}{\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}$$

Deduzione Naturale:

$$\dfrac{\dfrac{[\sim A] \qquad \dfrac{[(A \Rightarrow B) \Rightarrow A] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \qquad [\sim A]}{F}}{B}}{A \Rightarrow B}}{A}\;[\text{ip: } A]}{\dfrac{F}{A}\;[\text{ip: } \sim A]}}{((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\;[\text{ip: } (A \Rightarrow B) \Rightarrow A]$$

LOGICA MATEMATICA Esercitazione finale.

Esercizio 1. Trovare la forma normale disgiuntiva (FND) e la forma normale congiuntiva (FNC) della seguente formula ben formata:

$$P \ = \sim ((A \vee C) \Rightarrow \sim C) \wedge ((A \vee C) \vee C)$$

Soluzione:

Forma normale disgiuntiva:

$$\begin{aligned} P &\equiv \ \sim (\sim (A \vee C) \vee \sim C) \wedge (A \vee C \vee C) \\ &\equiv \ ((A \vee C) \wedge C) \wedge (A \vee C) \\ &\equiv \ ((A \wedge C) \vee (C \wedge C)) \wedge (A \vee C) \\ &\equiv \ ((A \wedge C) \vee C) \wedge (A \vee C) \\ &\equiv \ (A \wedge C \wedge A) \vee (C \wedge A) \vee (A \wedge C \wedge C) \vee (C \wedge C) \\ &\equiv \ (A \wedge C) \vee C\,. \end{aligned}$$

Forma normale congiuntiva:

$$\begin{aligned} P &\equiv \ \sim (\sim (A \vee C) \vee \sim C) \wedge (A \vee C \vee C) \\ &\equiv \ ((A \vee C) \wedge C) \wedge (A \vee C) \\ &\equiv \ (A \vee C) \wedge C\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Determinare se le seguenti formule ben formate sono derivabili. Per mostrare la derivabilità si dia una dimostrazione in un sistema deduttivo. Per dimostrare la non derivabilità si fornisca un contromodello.

$$P \; = \; \exists x((\sim A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A(x) \vee B(x)))\,.$$
$$P' \; = \; \forall x((A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (A(x) \Rightarrow B(x)))\,.$$

Soluzione:
P è derivabile, lo dimostro utilizzando il calcolo dei sequenti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B(a) \vdash B(a)}{B(a) \vdash P, A(a), B(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{A(a) \vdash A(a)}{A(a) \vdash P, A(a), B(a)}}{\vdash P, A(a), B(a), \sim A(a)}}{\sim A(a) \Rightarrow B(a) \vdash P, A(a), B(a)}}{\vdash P, (\sim A(a) \Rightarrow B(a)) \Rightarrow (A(a) \vee B(a))}}{\vdash \exists x((\sim A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A(x) \vee B(x)))}$$

P' non è derivabile, trovo un contromodello usando il calcolo dei sequenti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(y) \vdash B(y)}{A(y), A(y) \vdash B(y)} \qquad \dfrac{B(y) \vdash B(y)}{B(y), A(y) \vdash B(y)}}{A(y) \vee B(y), A(y) \vdash B(y)}}{A(y) \vee B(y) \vdash A(y) \Rightarrow B(y)}}{\vdash (A(y) \vee B(y)) \Rightarrow (A(y) \Rightarrow B(y))}}{\vdash \forall x((A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (A(x) \Rightarrow B(x)))}$$

$A(y) \vdash B(y)$ non è un assioma, posso derivare un contromodello formato da una struttura $S = \{D, I\}$ e un ambiente ξ^S così definiti:

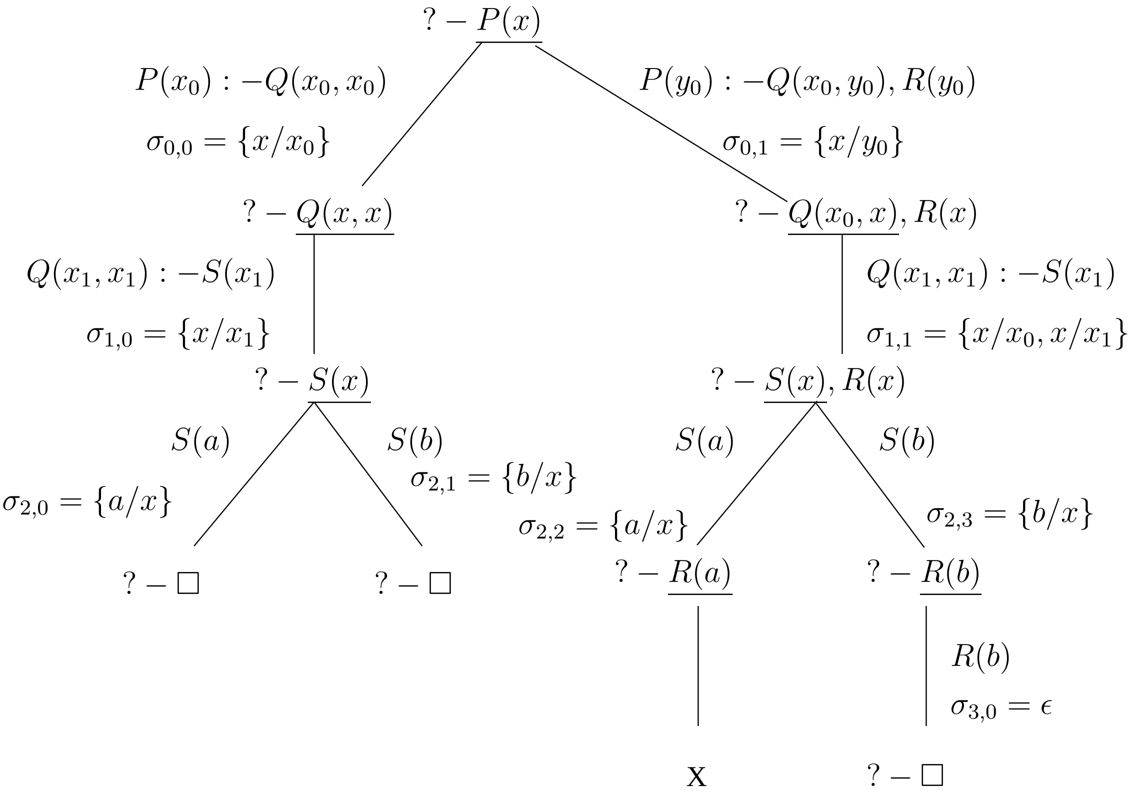
$D = \{y\}$
$\xi^S(y) = y$
$I(A(y)) = 1$ e $I(B(y)) = 0$.

Esercizio 3. Sia il programma logico:

$$
\begin{aligned}
&P(y) :- Q(x,y), R(y)\\
&P(x) :- Q(x,x)\\
&Q(x,x) :- S(x)\\
&R(b)\\
&S(a)\\
&S(b)
\end{aligned}
$$

Costruire l'albero SLD per il goal $? - P(x)$, usando la regola di selezione **leftmost**, e calcolare le sostituzioni di risposta.

Soluzione:



Sostituzioni di risposta: $\sigma = \{a/x\}$ e $\sigma' = \{b/x\}$.

Esercizio 4. Si dimostri per risoluzione che

$$\exists x(B(x) \wedge C(x)) \wedge \forall x(B(x) \Rightarrow A(x)) \wedge \sim \exists x(C(x) \Rightarrow C(f(x))) \models \exists x A(x)$$

Soluzione:
Siano:

$S = \exists x(B(x) \wedge C(x)) \wedge \forall x(B(x) \Rightarrow A(x)) \wedge \sim \exists x(C(x) \Rightarrow C(f(x)))$
$P = \exists x A(x)$.

Per dimostrare

$$\exists x(B(x) \wedge C(x)) \wedge \forall x(B(x) \Rightarrow A(x)) \wedge \sim \exists x(C(x) \Rightarrow C(f(x))) \models \exists x A(x)$$

basta dimostrare per risoluzione che $S^C \cup (\sim P)^C$ è insoddisfacibile.

Calcolo la forma a clausole di S:

1. Ridenominazione delle variabili:
   $\exists x(B(x) \wedge C(x)) \wedge \forall y(B(y) \Rightarrow A(y)) \wedge \sim \exists z(C(z) \Rightarrow C(f(z))$
2. Forma normale prenessa:
   $\exists x \forall y \forall z((B(x) \wedge C(x)) \wedge (B(y) \Rightarrow A(y)) \wedge \sim (C(z) \Rightarrow C(f(z)))$
3. Forma di Skolem:
   $\forall y \forall z((B(c) \wedge C(c)) \wedge (B(y) \Rightarrow A(y)) \wedge \sim (C(z) \Rightarrow C(f(z)))$
4. Eliminazione dei quantificatori universali:
   $((B(c) \wedge C(c)) \wedge (B(y) \Rightarrow A(y)) \wedge \sim (C(z) \Rightarrow C(f(z))$
5. Forma normale congiuntiva:
   $B(c) \wedge C(c) \wedge (\sim B(y) \vee A(y)) \wedge C(z) \wedge \sim C(f(z)))$
6. Forma a clausole:
   $S^C = \{\{B(c)\}, \{C(c)\}, \{\sim B(y), A(y)\}, \{C(z)\}, \{\sim C(f(z))\}\}$

Calcolo la forma a clausole di $\sim P$:

1. Calcolo di $\sim P$:
   $\sim P \equiv \sim \exists x A(x) \equiv \forall x \sim C(x)$
2. Forma a clausole:
   $(\sim P)^C = \{\{\sim A(x)\}\}$

Risoluzione di $S^C \cup (\sim P)^C$:

$C_1 = \{B(c)\}$	da S^C
$C_2 = \{\sim B(y), A(y)\}$	da S^C
$C_3 = \{A(c)\}$	risolvente di C_1 e C_2 con $\sigma_1 = \{c/y\}$
$C_4 = \{\sim A(x)\}$	da $(\sim P)^C$
$C_5 = \square$	risolvente di C_3 e C_4 con $\sigma_2 = \{c/x\}$