Teoria dell'Informazione e della Trasmissione — Appello del 13.6.2016

Esercizio A. Sia X una variabile casuale avente m valori distinti e Y una variabile casuale avente n valori distinti.

Parte 1. Quali sono i massimi valori possibili per $H(X,Y)$, $H(X)$, $H(Y \mid X)$ e $H(X \mid Y)$?

Parte 2. Si descriva una distribuzione congiunta $p(X,Y)$ tale che $H(X) = H(X \mid Y)$.

Esercizio B. Calcolare la lunghezza media di un codice di Huffman ternario per la sorgente i cui simboli hanno probabilità pari alle frequenze dei caratteri (inclusi gli spazi) che compaiono nell'incipit

```
chiare fresche e dolci acque
```

Esercizio C. Si consideri un canale con matrice $p(y \mid x)$ della forma

	$\mathcal{Y}_0$	$\mathcal{Y}_1$
$\mathcal{X}_0$	W_0	0
$\mathcal{X}_1$	0	W_1

dove $\mathcal{X}_0$ e $\mathcal{X}_1$ sono disgiunti così come $\mathcal{Y}_0$ e $\mathcal{Y}_1$. In altre parole, il canale è costituito dall'unione di due canali distinti con matrici W_0 e W_1 e tali che, per ogni dato $i \in \{0,1\}$, se viene inviato un simbolo $x \in \mathcal{X}_i$ allora può essere ricevuto soltanto un simbolo $y \in \mathcal{Y}_i$. Si introduca la variabile casuale Z tale che

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{X}_0 \\ 1 & \text{se } x \in \mathcal{X}_1. \end{cases}$$

Parte 1. È vero che $H(Y) = H(Y \mid Z)$? Giustificare la risposta.

Parte 2. È vero che $H(Y \mid X) = H(Y \mid X, Z)$? Giustificare la risposta.

Parte 3. Utilizzando i risultati delle parti 1 e 2 dimostrare che

$$I(X,Y) = I(X,Y \mid Z) + H(Z) .$$

Indicazione data durante la prova: la variabile casuale X fa riferimento implicito ad una distribuzione sugli ingressi del canale che non è necessario esplicitare nello svolgimento dell'esercizio.

Soluzione esercizio A (parte 1). La coppia (X, Y) ha $m \times n$ valori possibili e quindi l'entropia massima di $H(X, Y)$ è $\log(mn)$. Analogamente, X ha m valori possibili e quindi il massimo di $H(X)$ è $\log(m)$. Le quantità $H(Y \mid X)$ e $H(X \mid Y)$ sono massimizzate entrambe nel caso in cui X e Y siano indipendenti, ovvero quando $H(Y \mid X) = H(Y)$ e $H(X \mid Y) = H(X)$. Perciò, $H(Y)$ ha valore massimo $\log(n)$ e $H(X)$ ha valore massimo $\log(m)$.

Soluzione esercizio A (parte 2). Si ha $H(X) = H(X \mid Y)$ quando X e Y sono indipendenti. Per esempio, quando $\mathbb{P}(X = a, Y = b) = 1/(mn)$ per ogni a e b.

Soluzione esercizio B. La lunghezza media è $65/28$. Un codice di Huffman che realizza questa lunghezza media codifica i simboli:

`O U Q L D S F R` con parole di codice di lunghezza 3

`C E A I H` e lo spazio con parole di codice di lunghezza 2.

Soluzione esercizio C (parte 1). Non è vero. La conoscenza di Z, che mi dice se $Y \in \mathcal{Y}_0$ oppure $Y \in \mathcal{Y}_1$, può ridurre l'incertezza su Y.

Soluzione esercizio C (parte 2). Sì è vero. Infatti, dato X è noto se $Y \in \mathcal{Y}_0$ oppure $Y \in \mathcal{Y}_1$. La conoscenza di Z non diminuisce l'incertezza residua su Y.

Soluzione esercizio C (parte 3).

$$
\begin{aligned}
I(X, Y) &= H(Y) - H(Y \mid X) && \text{definizione di informazione mutua} \\
&= H(Y, Z) - H(Z \mid Y) - H(Y \mid X, Z) && \text{chain rule per l'entropia e parte 2} \\
&= H(Y, Z) - H(Y \mid X, Z) && \text{in quanto, dato } Y\text{, conosco il valore di } Z \\
&= H(Y, Z) + H(Y \mid Z) - H(Y \mid Z) - H(Y \mid X, Z) \\
&= H(Y, Z) - H(Y \mid Z) + I(X, Y \mid Z) && \text{definizione di informazione mutua} \\
&= H(Z) + I(X, Y \mid Z) && \text{chain rule per l'entropia.}
\end{aligned}
$$